<u>EXAMEN – 14 de febrero de 2022</u>

Ejercicio 1

Se tiene la estructura de la Figura 1. En ella se pide calcular de forma analítica la flecha y el giro en el punto B.

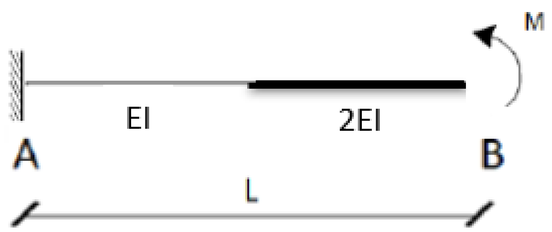


Figura 1

Ejercicio 2

Trazar el diagrama de momentos de la estructura de la Figura 2.

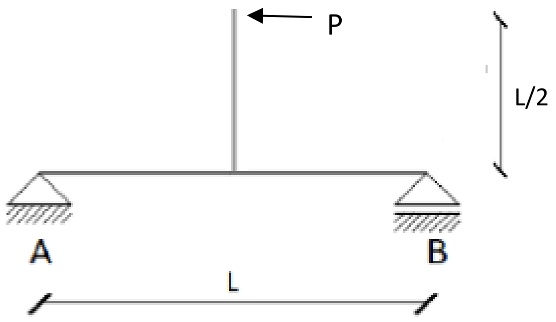
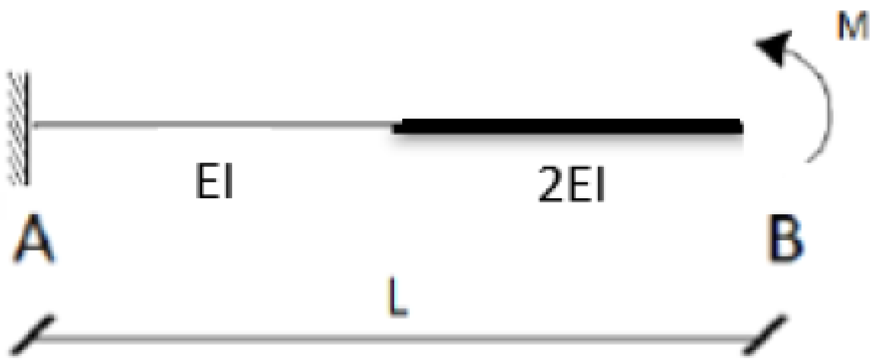


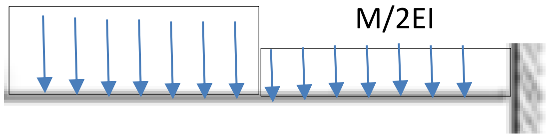
Figura 2

Teórico

Ej. 1



Viga análoga

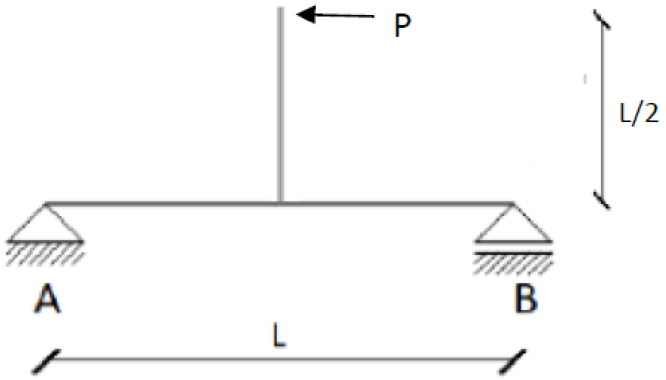


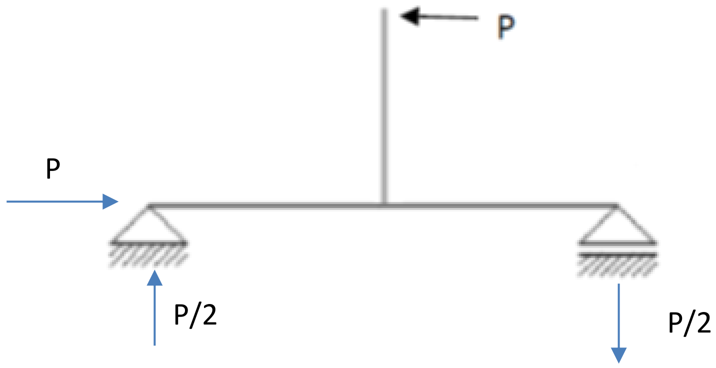
A B

$V_B=\theta_B \rightarrow V_B= L/2*M/EI+ L/2*M/2EI \rightarrow \theta_B=3L/4EI$ antihorario

$M_B=\delta_B \rightarrow M_B= 3/4L*L/2*M/EI+ L/4*L/2*M/2EI \rightarrow \delta_B=7L^2/16$ hacia arriba

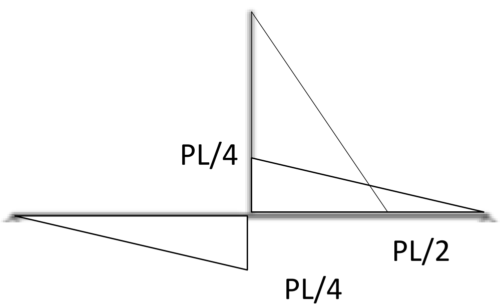
Ej. 2





Suma (F_v)=0 $R_A+R_B=0$ Suma (F_h)=0 $H_A-P=0$

Diagrama de M



EXAMEN- 14 de febrero de 2022

Ejercicio 1

Se tiene la estructura de la Figura 1. En ella hay aplicadas: una carga puntual P en el nodo A, una carga distribuida constante q_1 hacia abajo aplicada en la barra DE y una carga distribuida lineal hacia abajo aplicada en FG cuyo valor en el nodo F es q_2. Para dicha estructura:

i) Trazar los diagramas de solicitaciones (directa, cortante y momento flector) en todas las barras.

La barra BH se construye con una sección circular de diámetro conocido. Para el resto de la estructura se propone una sección compuesta por una escuadría de madera y dos planchuelas de acero, como se ve en la Figura 2.
Se conocen las siguientes propiedades de los materiales:

- Acero: $E_a = 210\,GPa \qquad \sigma_{adm-a} = 140\,MPa.$
- Madera: $E_m = 10\,GPa \qquad \sigma_{adm-m} = 8\,MPa.$

Para ello:

ii) Determinar el ancho L de la sección para que no se superen las tensiones normales admisibles de ambos materiales que la componen.

iii) Para el ancho hallado en la parte anterior, trazar el diagrama de tensiones normales (para la sección con momento máximo) y el diagrama de tensiones rasantes para la sección con máximo cortante.

iv) Si la unión de ambos materiales se hace mediante pares de tornillos separados longitudinalmente 10 cm, calcular el mínimo esfuerzo que debe ser capaz de soportar cada tornillo.

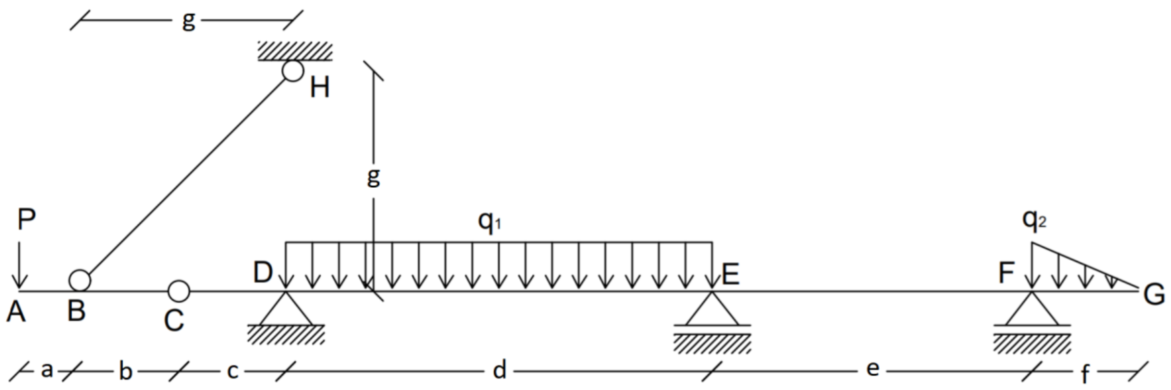


Figura 1: Estructura a estudiar

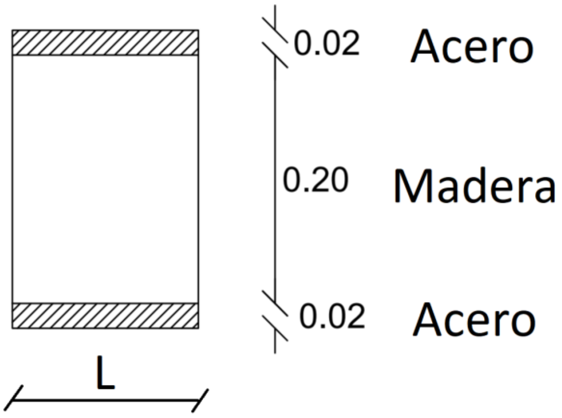


Figura 2: dimensiones en metros.

Ejercicio 2

Para la estructura de la figura 3:

a) Hallar las reacciones de la estructura.

b) Trazar los diagramas de solicitaciones (directa, cortante y momento flector) en todas las barras.

c) Dimensionar la todas las barras de la estructura con un único perfil PNI. Considerar $\sigma_{adm} = 140\ MPa$.

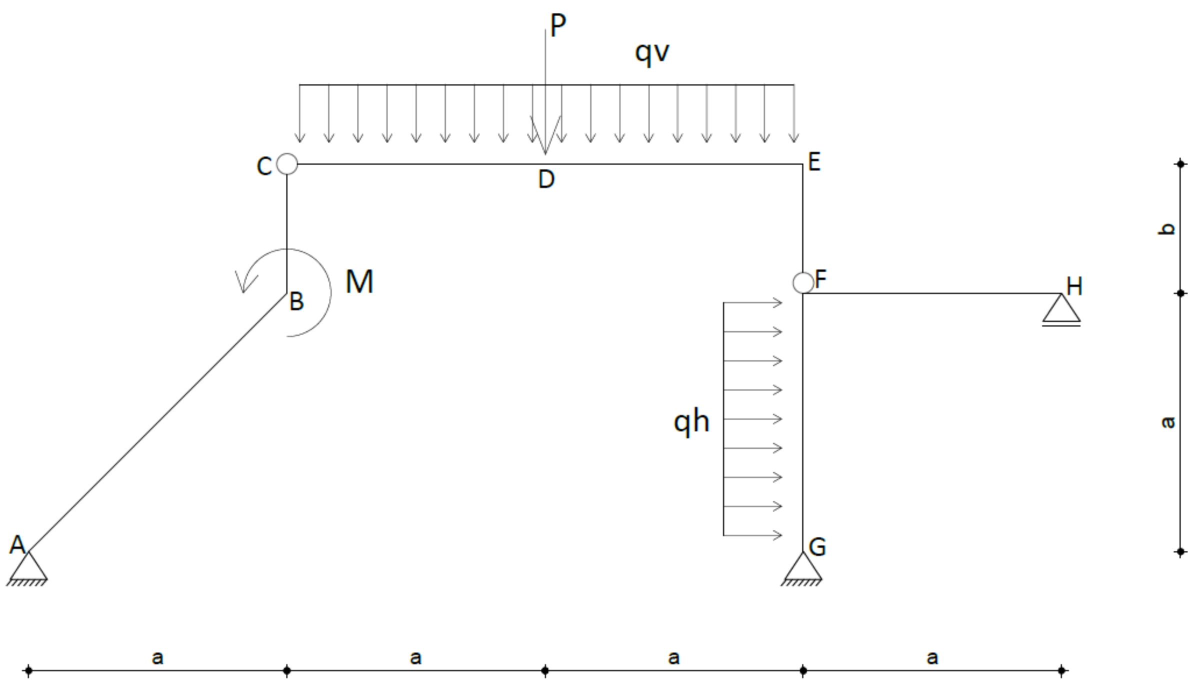


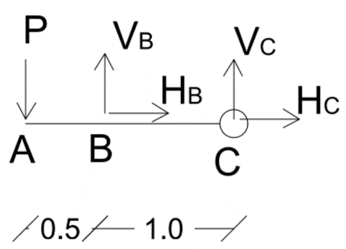
Figura 3: Pórtico a analizar.

Solución ejercicio 1:

i) Se toman los datos del Conjunto 1: P=15 kN, q_1=30 kN/m, q_2=15 kN/m, a=0,5 m, b=1 m, c=1 m, d=4 m, e=3 m, f=1 m, g=2 m.

Estudiamos la estructura en partes.

Primero el tramo ABC:

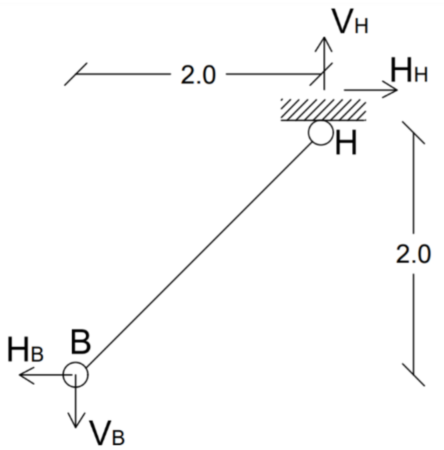


- $\sum M_C = 0 \;\rightarrow\; 1\,m \cdot V_B = \;1{,}5\,m \cdot 10\,kN$

  $V_B = \;15\,kN$
- $\sum V = 0 \rightarrow V_B + V_C = 10\,kN$

  $V_C = -5\,kN$
- $\sum H = 0 \;\rightarrow\; H_B = -H_C$

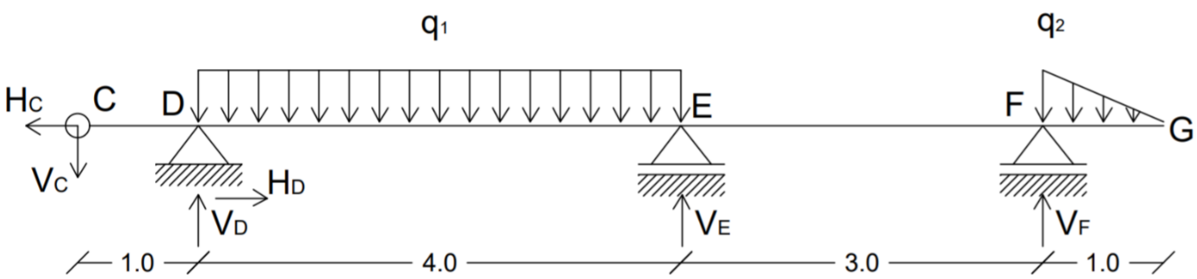
Estudiamos el tramo BH:



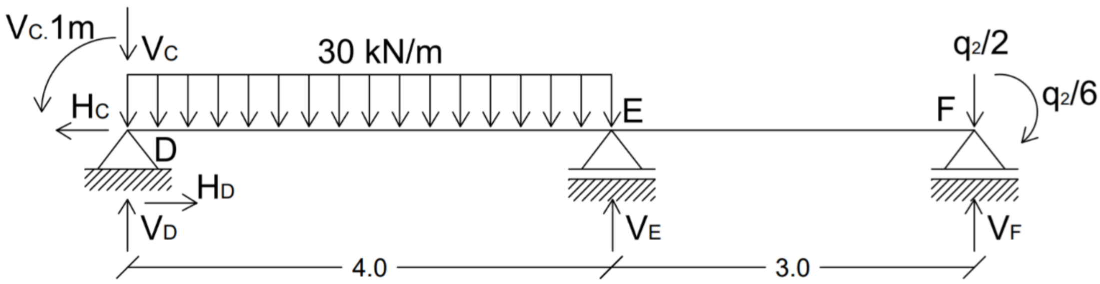
- $\sum M_H = 0 \rightarrow 2\,m \cdot V_B = 2\,m \cdot H_B$

  $H_B = 15\,kN$
- $V_H = 15\,kN$
- $H_H = 15\,kN$

Tramo CDEFG:



Su equivalente:



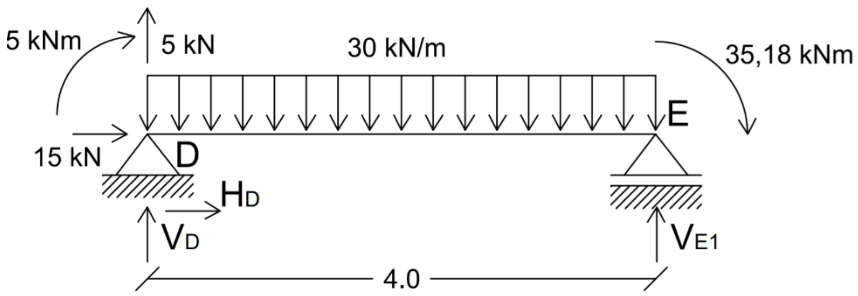
Debido a que se trata de una estructura hiperestática, para resolverlo planteamos ecuación de 3 momentos en el nodo E.

$$M_D \cdot \beta^{DE} + M_E \cdot (\alpha_E^{DE} + \alpha_E^{EF}) + M_F \cdot \beta^{EF} + \alpha_{0E}^{DE} + \alpha_{0E}^{EF} + \psi^{EF} - \psi^{DE} = 0$$

$$\frac{-V_C \cdot 4\,m}{6EI} + M_E \cdot (\frac{4\,m}{3EI} + \frac{3\,m}{3EI}) - \frac{2{,}5\,kNm \cdot 3\,m}{6EI} + \frac{30\,kN/m \cdot (4\,m)^3}{24\,EI} = 0$$

$$\boldsymbol{M_E = -35{,}18\,kNm}$$

Se trabaja con las barras DE y EF por separado.



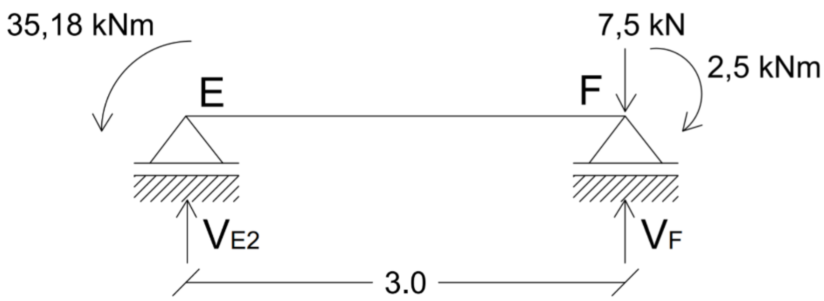
- $\sum M_D = 0 \rightarrow\ 5\,kNm\ +\ 30\,kN/m \cdot 4m \cdot 2m + 35{,}18\,kNm - V_{E1} \cdot 4\,m = 0$

$$V_{E1} = 70{,}045\text{ kN}$$

- $\sum V = 0 \rightarrow\ V_D + V_{E1}\ + 5\,kN -\ 30\,kN/m \cdot 4\,m = 0$

$$V_D = 44{,}955\,kN$$

- $\sum H = 0 \rightarrow H_D = -15\,kN$



- $\sum M_F = 0 \rightarrow \; -2{,}5\, kNm \, + \, 35{,}18\, kNm - V_{E2} \cdot 3\, m = 0$

$$V_{E2} = 10{,}893 \text{ kN} \rightarrow V_E = V_{E1} + V_{E2} = 80{,}938\, kN$$

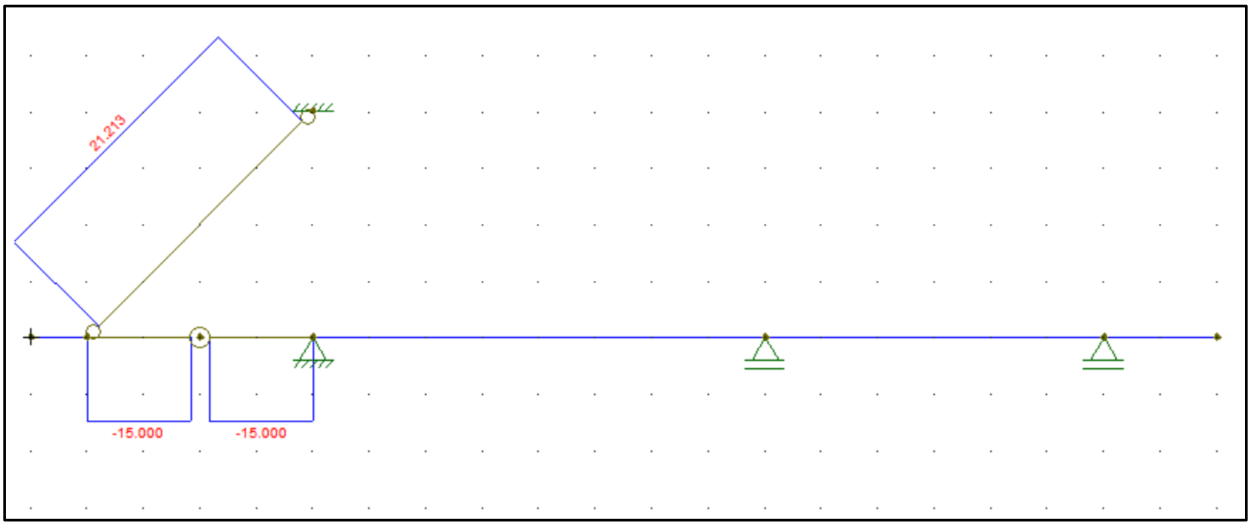
- $\sum V = 0 \rightarrow \; V_F + V_{E2} \, - \, 7{,}5\, kN = 0$

$$V_F = -3{,}393\, kN$$

En resumen, las reacciones en los apoyos de la estructura son:

$V_H = 15\, kN \, \uparrow$
$H_H = 15\, kN \, \rightarrow$
$V_D = 44{,}955\, kN \, \uparrow$
$H_D = 15\, kN \, \leftarrow$
$V_E = 80{,}938\, kN \, \uparrow$
$V_F = 3{,}393\, kN \, \downarrow$

<u>Diagrama de directa (kN):</u>



<u>Diagrama de cortante (kN):</u>

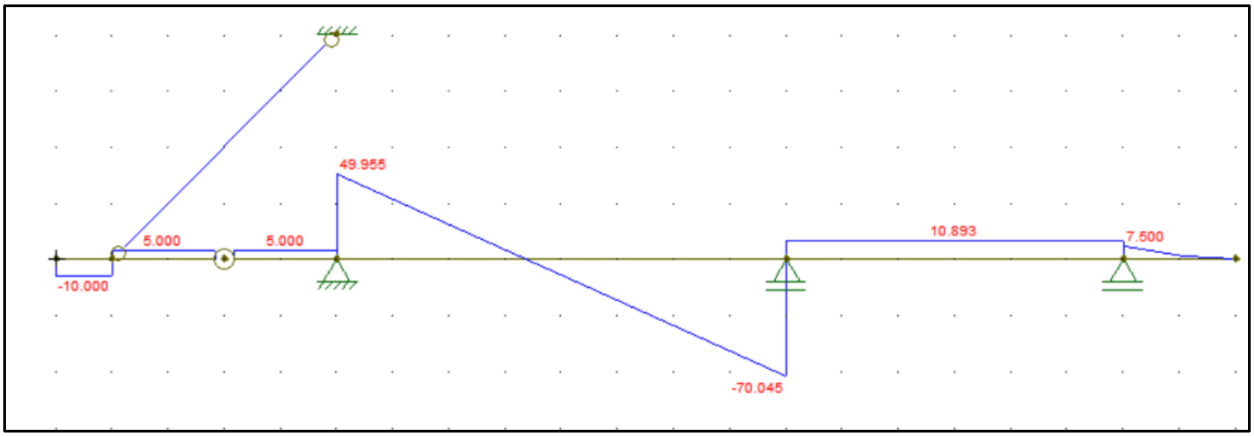
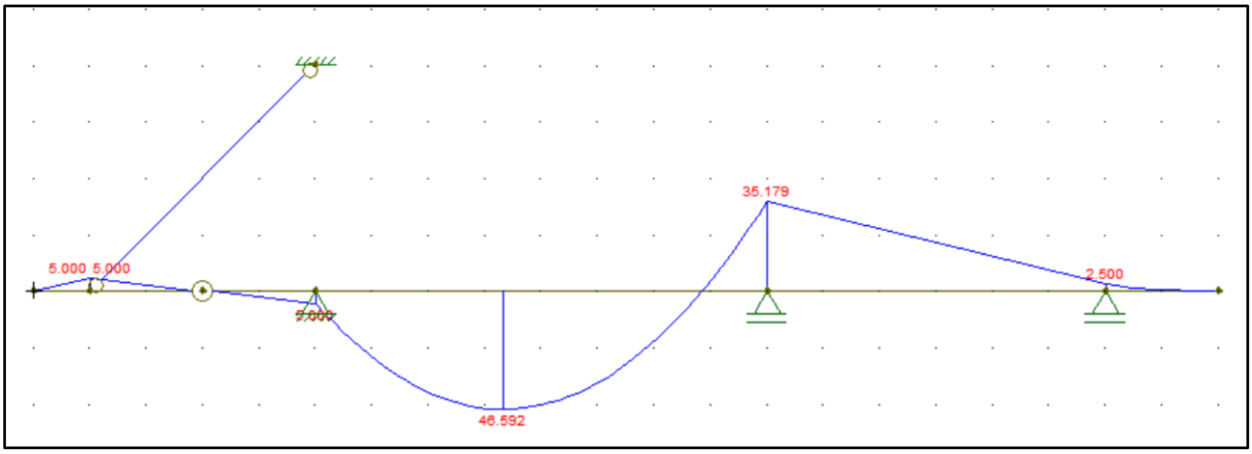
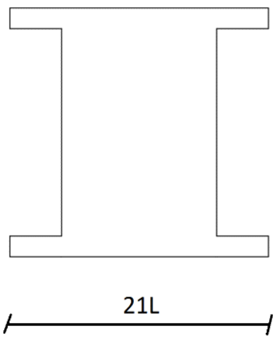


Diagrama de momento flector (kNm):



ii) Definimos $n = \frac{E_a}{E_m} = \frac{210\ GPa}{10\ GPa} = 21$

Multiplicando el ancho de las planchuelas de acero por n, el problema original de 2 materiales puede ser sustituido por un problema equivalente con un solo material (en este caso de madera).



Dada la simetría de la sección, el baricentro se encuentra a y_G=0,12 m desde la fibra inferior y superior.

Se halla la inercia de la sección homogénea equivalente:

$$I_h = \frac{L\ \cdot 0{,}2^3}{12} + 2\left(\frac{21L \cdot 0{,}02^3}{12} + 21L \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}11^2\right)$$

$$I_h = \frac{509 \cdot L}{46875}\ m^4$$

Acero:

$$\sigma = \frac{M_{máx} \cdot y}{I_h} \cdot n = \frac{46{,}592x10^3\ \cdot 0{,}12}{509L/46875} \cdot 21 \leq \sigma_{adm}$$
$$= 140\ MPa$$
$$L \geq 7{,}72\ cm$$

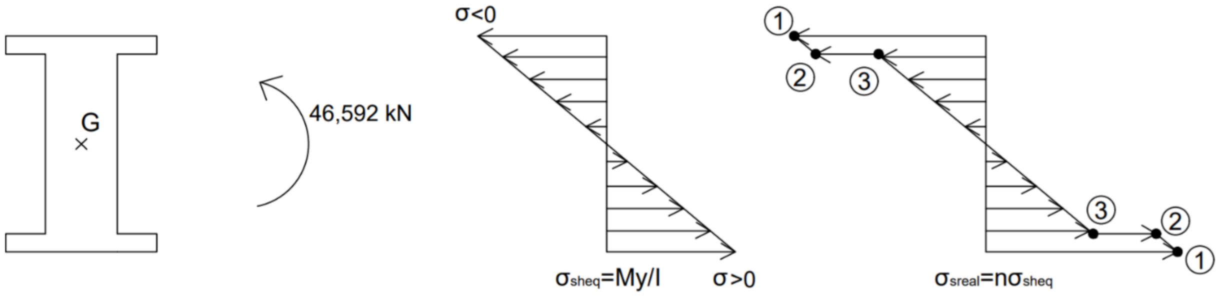
Madera:

$$\sigma = \frac{M_{máx} \cdot y}{I_h} \cdot n = \frac{46{,}592x10^3\ \cdot 0{,}1}{509L/46875} \leq \sigma_{adm} = 8\ MPa$$
$$L \geq 5{,}36\ cm$$

Se decide tomar **L=8 cm** ya que verifica ambas desigualdades.

iii)

Diagrama de tensiones normales en la sección de mayor momento flector:

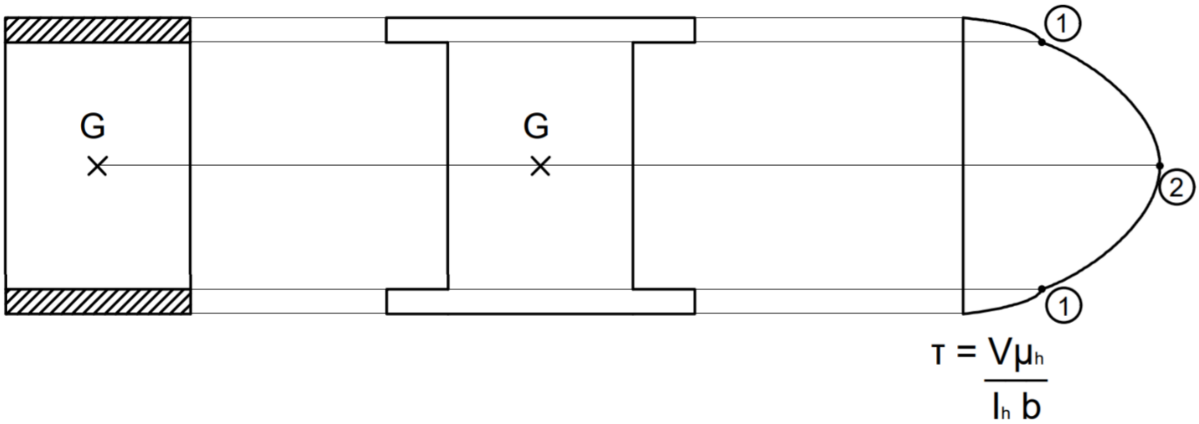


1) $\sigma_1 = \frac{M_{máx}\, y}{I_h} \cdot n = \frac{46{,}592x10^3 \cdot 0{,}12}{509 \cdot 0{,}08/46875} \cdot 21 = 135{,}16\, MPa$

2) $\sigma_2 = \frac{M_{máx}\, y}{I_h} \cdot n = \frac{46{,}592x10^3 \cdot 0{,}10}{509 \cdot 0{,}08/46875} \cdot 21 = 112{,}63\, MPa$

3) $\sigma_3 = \frac{M_{máx}\, y}{I_h} = \frac{46{,}592x10^3 \cdot 0{,}10}{509 \cdot 0{,}08/46875} = 5{,}36\, MPa$

Diagrama de tensiones rasantes en la sección de mayor cortante:



1) $\tau_1 = \frac{70{,}045x10^3 \cdot 1{,}68 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}11}{(509 \cdot 0{,}08/46875) \cdot 0{,}08} = 3{,}73\, MPa$

2) $\tau_2 = \frac{70{,}045x10^3 \cdot (1{,}68 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}11 + 0{,}08 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05)}{(509 \cdot 0{,}08/46875) \cdot 0{,}08} = 4{,}13\, MPa$

iv)

s = 10 cm = 0,1 m

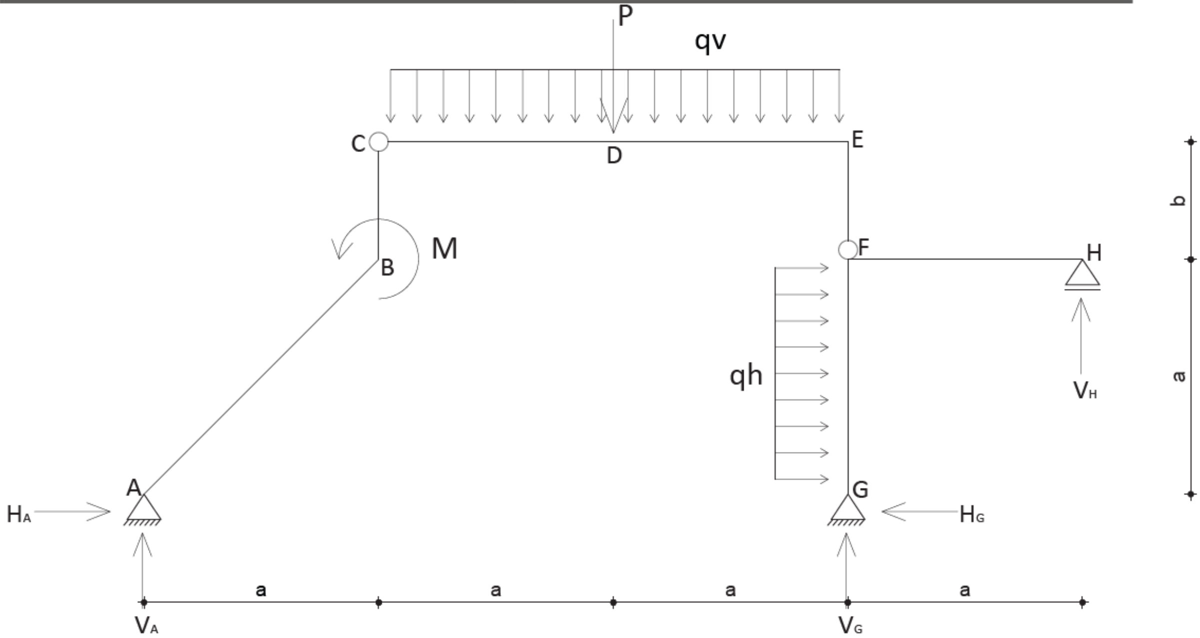
$F_{conexión} = \tau \cdot b \cdot s = 3{,}73\, MPa \cdot 0{,}08\, m \cdot 0{,}1\, m = 29840\, N$

$F_{conector} = \frac{F_{conexión}}{2} = 14920\, N$

Solución ejercicio 2

Para la estructura de la figura 1:

d) Hallar las reacciones de la estructura.



Se toman los datos numéricos del conjunto C1 y se procede a hallar las reacciones de la estructura aplicando las ecuaciones de equilibrio.

Conjunto	a (m)	b (m)	M (kNm)	P (kN)	q_v (kN/m)	q_h (kN/m)
C1	2	1	8	15	12,5	10

$$\sum M_C^{izq} = 0 \rightarrow M + (a+b)\cdot H_A - a\cdot V_A = 0$$

$$\sum M_E^{izq} = 0 \rightarrow M + a\cdot H_A + P\cdot a + q_v\cdot 2a\cdot a - 3a\cdot V_A = 0$$

Sustituyendo con los datos numéricos obtenemos un sistema de 2x2.

$$\left.\begin{array}{r} 8 + 3H_A = 2V_A \\ 8 + 2H_A + 30 + 100 = 6V_A \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} H_A = 16{,}3\ kN \\ V_A = 28{,}4\ kN \end{array}$$

$$\sum F_{horizontales} = 0 \rightarrow H_A + a\cdot q_h - H_G = 0 \rightarrow H_G = 36{,}3\ kN$$

$$\sum M_E^{der} = 0 \rightarrow a\cdot V_H + q_v\cdot a\cdot \frac{a}{2} - a\cdot H_G = 0 \rightarrow V_H = 26{,}3\ kN$$

$$\sum F_{verticales} = 0 \rightarrow V_A + V_G + V_H - 2a\cdot q_v - P = 0 \rightarrow V_G = 10{,}3\ kN$$

e) Trazar los diagramas de solicitaciones (directa, cortante y momento flector) en todas las barras.

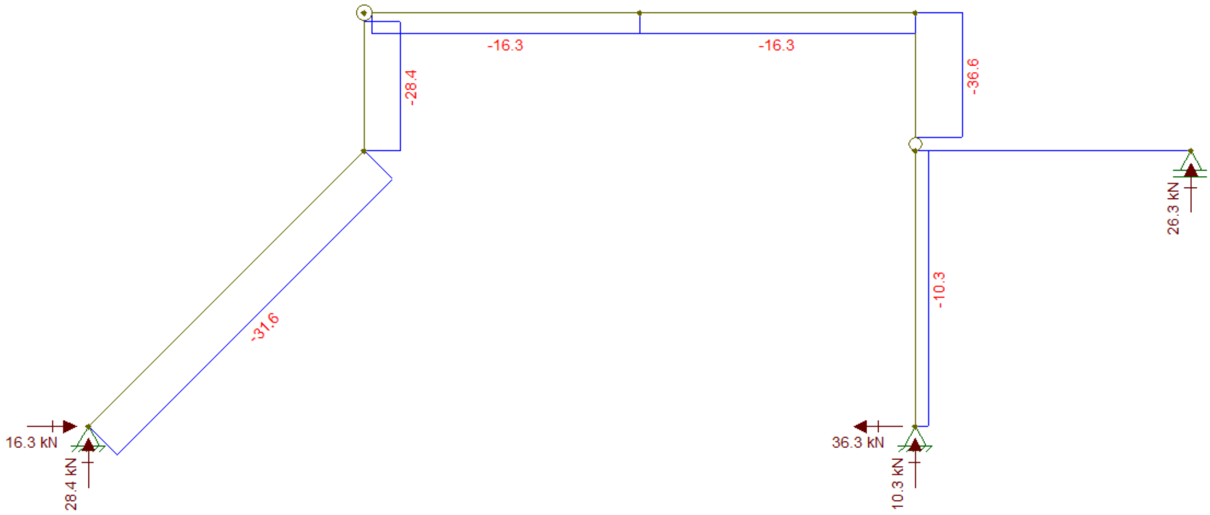


Diagrama de directas (kN)

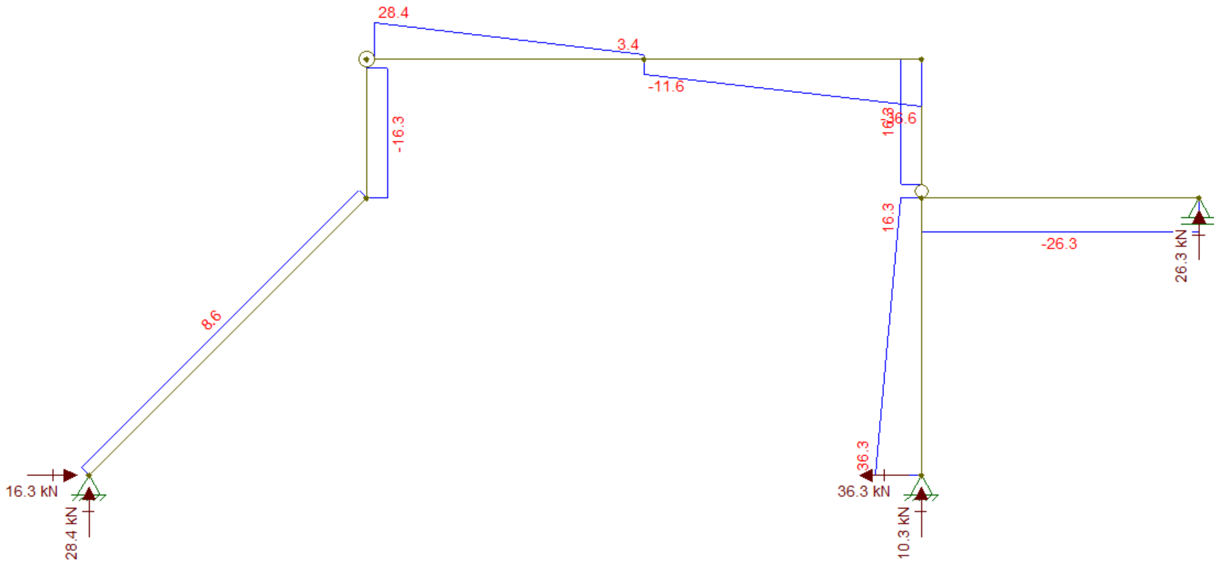


Diagrama de cortante (kN)

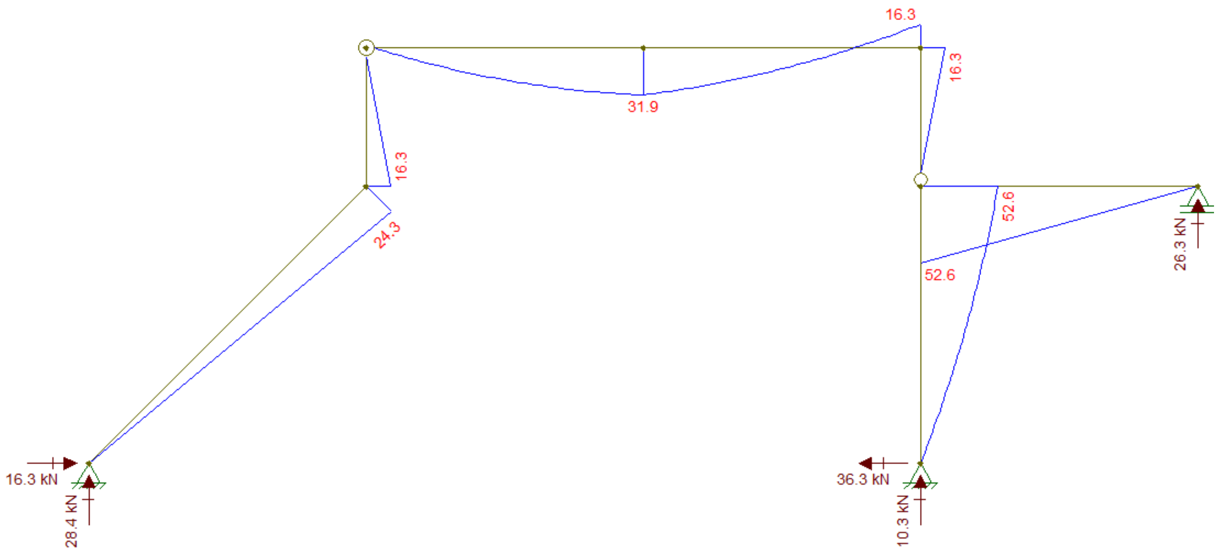


Diagrama de momentos (kNm)

f) Dimensionar la todas las barras de la estructura con un único perfil PNI. Considerar $\sigma_{adm} = 140\ MPa.$

El máximo momento se genera en el nodo F y tiene un valor de 52,6 kNm. Despreciando en un principio las tensiones generadas por la fuerza axial se determina un perfil estimado:

$$\sigma_{adm} \geq \frac{M}{W} \rightarrow\ W \geq \frac{M}{\sigma_{adm}} = \frac{52600\ Nm}{140 \times 10^6\ \frac{N}{m^2}} = 3{,}76 \times 10^{-4}\ m^3$$

Se elige un perfil PNI 260 y se estudia si no se sobrepasan las tensiones admisibles ahora considerando la fuerza axial.

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{P}{A} = \frac{52600\ Nm}{4{,}42 \times 10^{-4}\ m^3} + \frac{31600\ N}{5{,}33 \times 10^{-3}\ m^2} = 125{,}8\ MPa \leq 140\ MPa = \sigma_{adm}$$

En este caso se utilizó la máxima directa de toda la estructura. Estrictamente lo correcto sería utilizar la fuerza axial correspondiente con la barra que presenta el máximo momento flector (en este caso la barra FH con un axil de 10,3 kN). El caso presentado diseña la estructura de manera más conservadora.