

VIGAS RECTAS CONTINUAS, ECUACIONES ANGULARES, ECUACIÓN DE TRES MOMENTOS Y APLICACIONES

1. *Convenciones e Hipótesis*

Para estudiar las estructuras compuestas por vigas rectas, que supondremos, para simplificar la representación gráfica que tienen el eje de la viga horizontal, consideraremos un sistema de coordenadas como el de la figura 1, tal que el eje horizontal z apunta en la dirección del eje de la viga y pasa por el baricentro. Asimismo supondremos que los ejes principales de la sección son tales que el eje y se dirige hacia abajo y el eje x es horizontal.

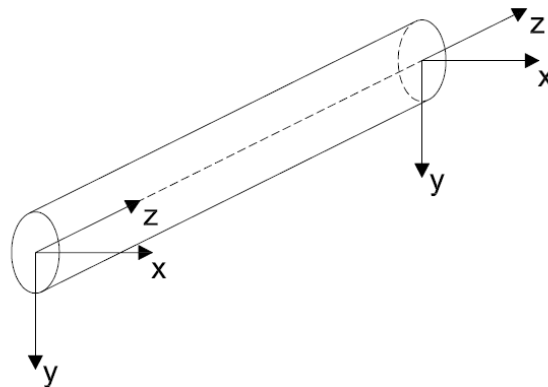


Figura 1: Ejes coordenados

Supondremos que estamos trabajando con estructuras que cumplen las siguientes condiciones:

- Vigas rectas
- Materiales elásticos y lineales
- Secciones simétricas respecto del eje y .
- Cargas distribuidas q o concentradas P según el eje y .

2. *Equilibrio de un tramo*

Analizando el equilibrio de fuerzas de un pequeño tramo de dicha viga (figura 2), como ya fue visto en el curso de Resistencia de Materiales I, se tiene que:

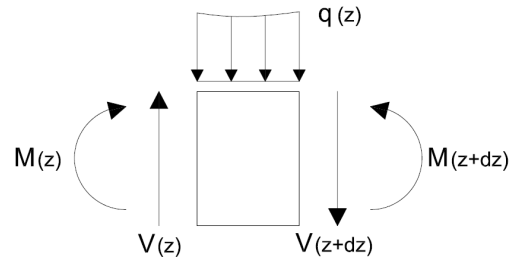


Figura 2: Equilibrio de fuerzas en un dz

Planteando el equilibrio de fuerzas en la dirección vertical se obtiene:

$$\frac{dV}{dz} + q(z) = 0$$

Planteando el equilibrio de momentos en relación a un punto (puede elegirse el punto $z+dz$) se obtiene:

$$\frac{dM}{dz} = V(z)$$

en definitiva ambas expresiones se pueden resumir en la siguiente conclusión:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dV}{dz} = -q \quad (1)$$

3. **Relación Momento Curvatura**

Es conocida del curso de Resistencia I la expresión que relaciona el momento flector en una sección con la curvatura de la viga deformada en esa sección (o sea con la derivada segunda de la deformada), como se indica en la figura 3.

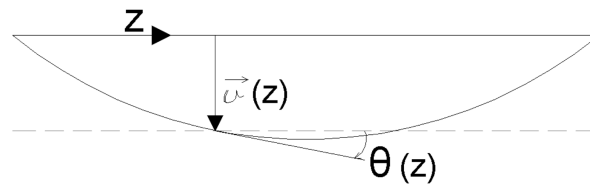


Figura 3: Viga deformada

Ella es

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d\theta}{dz} = -\frac{M}{EI_x} \quad (2)$$

4. Analogía de Mohr

Mohr observó que podía establecerse una analogía entre las expresiones (1) y (2). En esta analogía se corresponden:

- $v \leftrightarrow M$
- $\theta \leftrightarrow V$
- $\frac{M}{EI_x} \leftrightarrow q$

Puede observarse también para el caso de una viga, de longitud L y simplemente apoyada en sus dos extremos, que las condiciones de borde impuestas por los apoyos son:

$$v(0) = v(L) = 0$$
$$M(0) = M(L) = 0$$

O sea que estas condiciones coinciden para los términos análogos.

Debido a esta analogía entre ambas ecuaciones y condiciones de borde Mohr concluyó que en una viga simplemente apoyada puede calcularse la deformada $v(z)$ y el giro $\theta(z)$ hallando en la misma viga los diagramas de momentos y cortantes que produce una carga distribuida de

valor $\frac{M}{EI_x}(z)$.

Para los ángulos que se producen en los extremos de la viga tomaremos como positivo el mismo sentido que el de los momentos flectores como se indica en la figura 4.



Figura 4: Ángulos de giro en los apoyos

De acuerdo a esta convención se tendrá que:

$$\theta_A = \theta(0)$$
$$\theta_B = -\theta(L)$$
$$v_A = v(0)$$
$$v_B = v(L)$$

En definitiva se concluye, utilizando la analogía de Mohr, que se pueden calcular los giros en los extremos como si fueran las reacciones en los apoyos de la carga $\frac{M}{EI_x}$, como se indica en la figura 5.

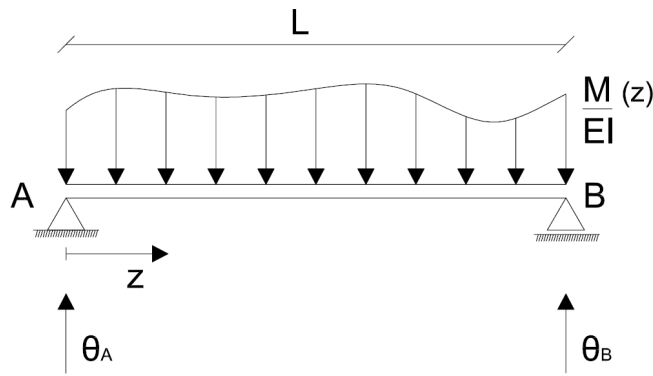


Figura 5: Resolución de la viga análoga

En consecuencia tomando momento en relación a B y A respectivamente se pueden obtener los giros en los apoyos, que tienen la forma:

$$\theta_A = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M}{EI_x} (L - z) dz$$

$$\theta_B = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M}{EI_x} z dz$$

5. Aplicaciones de la analogía de Mohr

Consideraremos el caso de una viga simplemente apoyada y distinguiremos cuatro casos:

- a) Para las cargas aplicadas en el vano

Los ángulos de giro resultantes de la aplicación de estas cargas serán denominados α_{0A} y α_{0B} y sus valores son:

$$\alpha_{0A} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M}{EI_x} (L - z) dz$$

$$\alpha_{0B} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{M}{EI_x} z dz$$

Donde M es el momento producido por las cargas aplicadas en el vano. Es claro que en general este momento será función de z.

- b) Considerando un momento unitario aplicado en A:

La misma expresión empleada en a) puede ser utilizada en el caso de un momento unitario aplicado en el extremo izquierdo de la viga. Observando la figura se puede ver que el diagrama de momentos es lineal de acuerdo con la expresión que se indica en la figura 6.

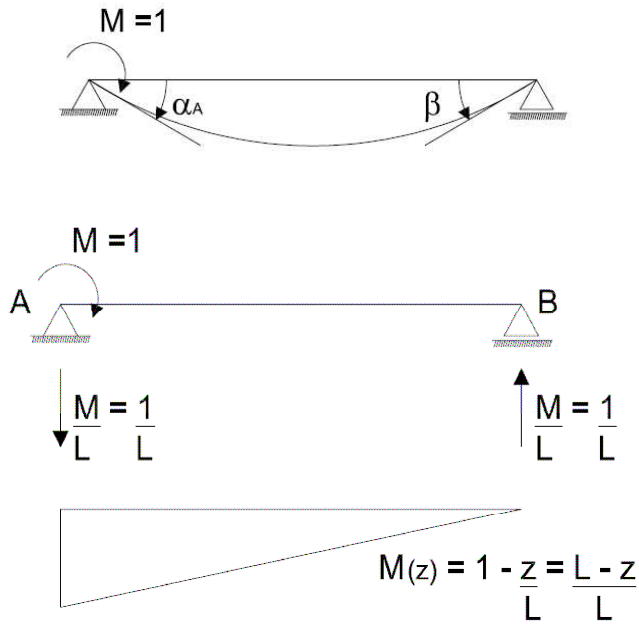


Figura 6: Momento unitario en A

Los ángulos de giro resultantes de la aplicación de este momento unitario se denominan α_A y β y sus valores son:

$$\alpha_A = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\left(1 - \frac{z}{L}\right)(L-z)}{EI_x} dz$$

$$\beta = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\left(1 - \frac{z}{L}\right)}{EI_x} z dz$$

c) Consideramos un momento unitario aplicado en B:

De manera similar al anterior se puede resolver este caso, teniendo en cuenta que el diagrama de momentos es lineal, como se indica en la figura 7.

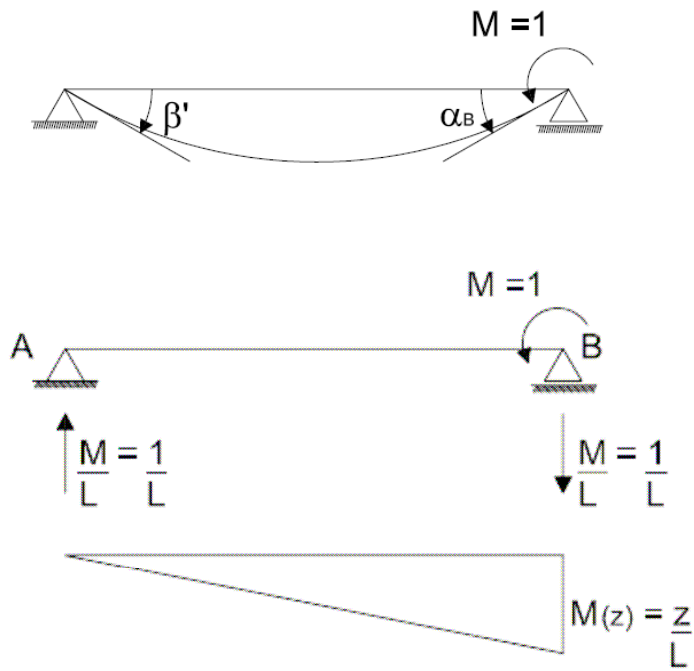


Figura 7: Momento unitario en B

Los ángulos de giro resultantes de la aplicación de este momento unitario se denominan α_B y β' y sus valores son:

$$\alpha_B = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{z}{L} \times \frac{z}{EI_x} dz$$

$$\beta' = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{z(L-z)}{EI_x} dz = \beta$$

La anterior igualdad (entre β y β') es inmediata pues las integrales son iguales entre si. Otra forma de obtener este resultado hubiera sido aplicando el teorema de Betti a los casos b) y c).

d) Si consideramos que se producen descensos en los apoyos:

Supondremos que hay un descenso en el punto A y otro en el punto B como se indica en la figura 8, que se considera positivo hacia abajo.

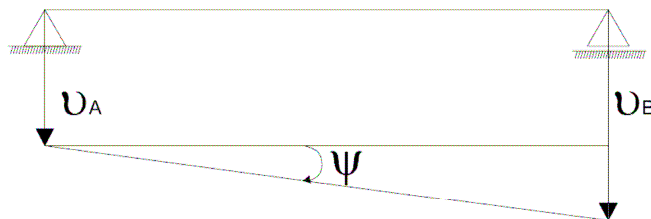


Figura 8: Descenso de los apoyos

En este caso será

$$v_A = v(0)$$

$$v_B = v(L)$$

Para desplazamientos pequeños se cumple que el giro de la viga es:

$$\psi \cong \operatorname{tg} \psi = \frac{v_B - v_A}{L}$$

resultando que

$$\theta_A = \psi$$

$$\theta_B = -\psi$$

6. Ecuaciones angulares

a) Caso General

Si observamos que vale (con las hipótesis realizadas) el principio de superposición entonces en el caso general de una viga sometida a cargas en el vano, momentos en los extremos y descensos en los apoyos, que se muestra en la figura 9,

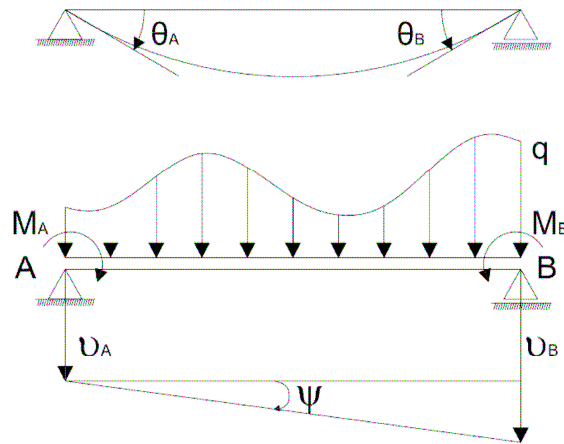


Figura 9: Ecuaciones angulares

los giros en A y B pueden ser expresados de la forma:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \alpha_{0A} + M_A \cdot \alpha_A + M_B \cdot \beta + \psi \\ \theta_B &= \alpha_{0B} + M_A \cdot \beta + M_B \cdot \alpha_B - \psi \end{aligned} \quad (3)$$

Estas expresiones son conocidas como las ecuaciones angulares.

b) Caso de secciones constantes

En el caso, muy frecuente, que las barras tengan $EI = \text{cte}$ se pueden simplificar las expresiones de los coeficientes de la siguiente manera:

$$\alpha_A = \frac{L}{EI_x} \int_0^1 (1 - 2 \cdot u + u^2) du = \frac{L}{EI_x} \left(u - u^2 + \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^1 \Rightarrow \alpha_A = \frac{L}{3EI_x}$$

$$\alpha_B = \frac{L}{EI_x} \int_0^1 u^2 du = \frac{L}{EI_x} \left(\frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^1 \Rightarrow \alpha_B = \frac{L}{3EI_x}$$

$$\beta = \frac{L}{EI_x} \int_0^1 (1-u)u du = \frac{L}{EI_x} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{L}{EI_x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \Rightarrow \beta = \frac{L}{6EI_x}$$

En definitiva en estas condiciones no es necesaria la utilización de subíndices para los coeficientes α pues son iguales, resultando:

$$\alpha = \alpha_A = \alpha_B = \frac{L}{3EI_x} \quad \beta = \frac{L}{6EI_x} = \frac{1}{2} \alpha \quad (4)$$

7. Viga continua de N tramos

Consideremos una viga continua con N tramos y N+1 apoyos. Para el análisis consideraremos dos tramos contiguos genéricos que llamaremos n y n+1 definidos por los apoyos n-1, n y n+1, según se indica en la figura 10.

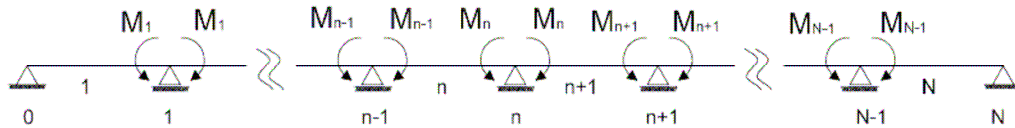


Figura 10: Viga continua

En un apoyo genérico n confluyen los tramos n y n+1. En cada apoyo existe transmisión de momento entre ambos tramos y no existe transmisión de cortante pues ambos descargan sobre el apoyo.

En el nudo n como consecuencia de la continuidad de la viga el tramo n transmite un momento al tramo n+1. Por acción y reacción este momento es igual en módulo y de sentido contrario al que ejerce el tramo n+1 sobre el tramo n. Llamaremos M_n a este momento que se transmite en el nudo n de un tramo de la viga al otro, donde el subíndice n corresponde al apoyo o nudo n. En la figura 10 se pueden observar los mismos.

En todas estas expresiones emplearemos una notación donde el subíndice indique el nudo y el superíndice la barra. De esa manera θ_{n-1}^n es el ángulo de giro de la barra n en el nudo n-1, o

dicho de otra manera será el θ_A de la barra n. Asimismo θ_n^n es el ángulo de giro de la barra n en el nudo n o sea que es el θ_B de la barra n.

En el caso de los momentos, estos solo dependen del nudo, pues son iguales en ambas barras. En ese caso tienen solo subíndice. El momento flector en el nudo n es, entonces, M_n .

En el caso del ángulo de giro producido por el descenso de los apoyos este depende solo de la barra por lo que tiene solo superíndice. El giro de la barra n es ψ^n .

Análoga situación se presenta para el coeficiente β donde para el tramo n es β^n . Los términos α_{0A} y α_{0B} de la barra n se denominan $\alpha_{0_{n-1}}^n$ y $\alpha_{0_n}^n$. Los coeficientes α_A y α_B de la barra n se llaman α_{n-1}^n y α_n^n . En el caso que la sección de la viga sea constante estos coeficientes dependen solo del tramo y se denomina a ambos α^n .

Con esta convención las ecuaciones angulares de las barras n y n+1 quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\theta_{n-1}^n &= \alpha_{0_{n-1}}^n + M_{n-1} \alpha_{n-1}^n + M_n \beta^n + \psi^n \\ \theta_n^n &= \alpha_{0_n}^n + M_{n-1} \beta^n + M_n \alpha_n^n - \psi^n \\ \theta_n^{n+1} &= \alpha_{0_n}^{n+1} + M_n \alpha_n^{n+1} + M_{n+1} \beta^{n+1} + \psi^{n+1} \\ \theta_{n+1}^{n+1} &= \alpha_{0_{n+1}}^{n+1} + M_n \beta^{n+1} + M_{n+1} \alpha_{n+1}^{n+1} - \psi^{n+1}\end{aligned}\quad (5)$$

Donde sabemos que:

$$\psi^n = \frac{v_n - v_{n-1}}{L^n}$$

8. Ecuación de tres momentos (o de Clapeyron)

En la medida que la viga es continua en los apoyos, los ángulos que tiene un tramo de la viga y el siguiente en un apoyo deben reflejar esa continuidad. Esto implica (ver figura 11), de acuerdo a la convención de signos elegida, que para el nudo n se debe cumplir que $\theta_n^n = -\theta_n^{n+1}$ o lo que es lo mismo:

$$\theta_n^n + \theta_n^{n+1} = 0 \quad (6)$$

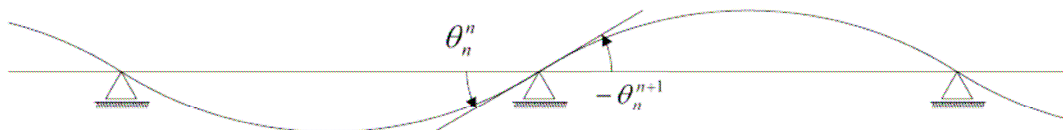


Figura 11: Continuidad de la viga

Sustituyendo con las expresiones (5) en (6) y agrupando los términos se obtiene la siguiente expresión conocida como la “ecuación de tres momentos”.

$$M_{n-1}\beta^n + M_n(\alpha_n^n + \alpha_n^{n+1}) + M_{n+1}\beta^{n+1} + \alpha_{0n}^n + \alpha_{0n}^{n+1} - \psi^n + \psi^{n+1} = 0 \quad (7)$$

En esta expresión obtenida en un nudo n genérico, los términos α_{0n}^n y α_{0n}^{n+1} dependen de la geometría de la estructura y de las cargas aplicadas, los términos ψ^n y ψ^{n+1} dependen de los descensos de los apoyos y de la geometría de la estructura, los términos α_n^n , α_n^{n+1} , β^n y β^{n+1} dependen de la geometría de la estructura y los momentos M_{n-1} , M_n y M_{n+1} son normalmente las incógnitas a determinar para resolver el problema.

Para la viga considerada de N tramos, que tiene N+1 apoyos, los momentos incógnitas son N-1 pues el apoyo inicial y el apoyo final no transmiten momentos. Por cada apoyo donde hay continuidad de la viga habrá una ecuación, resultando que tampoco tendremos ecuación por el primer y el último apoyo y en consecuencia tendremos también N-1 ecuaciones. En cada una de ellas aparecen tres de los momentos incógnitas, el que corresponde al apoyo considerado y los que corresponden a los dos apoyos contiguos. En definitiva, se trata de un sistema de N-1 ecuaciones lineales con N-1 momentos incógnitas.

Si este sistema se expresa en forma matricial se tendrá una matriz banda de ancho 3 como se indica en la figura 12.

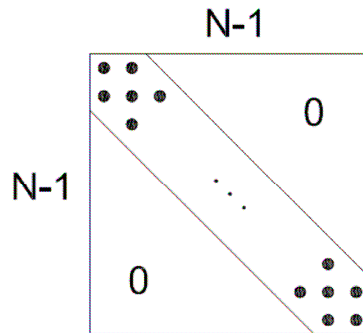


Figura 12: Matriz del sistema de ecuaciones

9. Viga continua con empotramientos

Si hubiera empotramientos podríamos distinguir tres casos.

Un primer caso sería con el empotramiento en el primer apoyo. En ese caso aparece un momento incógnita más que es M_0 , o sea que se tienen N momentos incógnitas. Pero aparece una ecuación más: la ecuación angular del apoyo 0. En este apoyo la ecuación queda:

$$\theta_0^1 = 0 = \alpha_{00}^1 + M_0\alpha_0^1 + M_1\beta^1 + \psi^1$$

En definitiva, tenemos nuevamente un sistema resoluble, de N ecuaciones y N incógnitas.

Puede observarse que si en la expresión (7) se hace $n = 0$ y se eliminan todos los términos que tienen subíndice -1 (no tienen sentido pues corresponderían al apoyo -1 , que no existe) o superíndice 0 (no tienen sentido pues corresponderían al tramo 0 , que no existe) se obtiene la misma expresión.

Un segundo caso es el de un empotramiento en el apoyo final N . En este caso se incorpora el momento incógnita M_N y se agrega la ecuación:

$$\theta_N^N = 0 = \alpha_{0_N}^N + M_{N-1}\beta^N + M_N\alpha_N^N - \psi^N$$

En definitiva nos encontraríamos en una situación análoga al caso anterior y resolveríamos un sistema lineal de N ecuaciones con N incógnitas. Haciendo $n = N$ en la expresión 7 y eliminando los términos que tienen $N+1$ como subíndice o superíndice (no tienen sentido pues no existe la barra $N+1$ ni tampoco el apoyo $N+1$) se obtiene la misma expresión.

Un tercer caso sería que el empotramiento se encuentre en un apoyo intermedio. En este caso ese apoyo no transmite ni cortante ni momento y en definitiva se pueden estudiar por separado los dos tramos; por un lado el tramo de la viga que está a la izquierda del empotramiento y por el otro el que está a la derecha. El momento en este empotramiento es el que resulta de la suma del existente en ambos tramos.

10. **Calculo de las reacciones**

Para calcular las reacciones en los apoyos utilizando una nomenclatura similar (ver figura 13) se tiene que la reacción del apoyo n está compuesta por la suma de la reacción que se produce en ese apoyo debido al tramo n más la debida al tramo $n+1$, es decir:

$$R_n = R_n^n + R_n^{n+1}$$

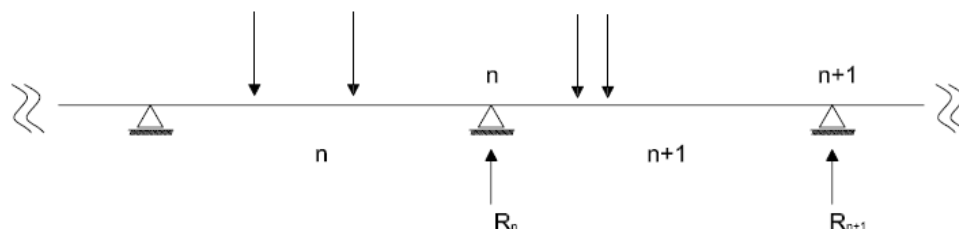


Figura 13: Reacciones

Calculamos las reacciones sumando las distintas componentes, o sea como la suma de las producidas por las fuerzas sobre el vano más las producidas por los momentos. Los descensos de los apoyos no producen reacciones. De esta manera se tendrá que:

$$R_n^n = R_{0_n}^n + \frac{M_{n-1}}{L^n} - \frac{M_n}{L^n}$$

$$R_n^{n+1} = R_{0n}^{n+1} - \frac{M_n}{L^{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{L^{n+1}}$$

En definitiva

$$R_n = R_{0n}^n + R_{0n}^{n+1} + \frac{M_{n-1}}{L^n} - \frac{M_n}{L^n} - \frac{M_n}{L^{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{L^{n+1}} = R_{0n} + \frac{1}{L^n}(M_{n-1} - M_n) + \frac{1}{L^{n+1}}(M_{n+1} - M_n) \quad (8)$$

La expresión anterior permite luego de haber resuelto el sistema de ecuaciones lineales para obtener los momentos, terminar de resolver el problema hallando las reacciones.

11. Caso particular para la viga de sección constante

Como se dijo anteriormente si $EI_x = \text{cte}$ entonces:

$$\beta^n = \frac{L^n}{6EI_x}$$

$$\alpha^n = \alpha_n^n = \alpha_{n-1}^n = \frac{L^n}{3EI_x}$$

Multiplicando a la ecuación de tres momentos por $6EI_x$ obtenemos que:

$$M_{n-1}L^n + 2M_n(L^n + L^{n+1}) + M_{n+1}L^{n+1} + 6EI_x(\alpha_{0n}^n + \alpha_{0n}^{n+1}) + 6EI_x(\psi^{n+1} - \psi^n) = 0 \quad (9)$$

Donde

$$\alpha_{0n}^n = \frac{1}{L^n} \int_0^{L^n} \frac{M}{EI_x} z dz$$

$$\alpha_{0n}^{n+1} = \frac{1}{L^{n+1}} \int_0^{L^{n+1}} \frac{M}{EI_x} (L^{n+1} - z) dz$$

Y en consecuencia:

$$6EI_x \alpha_{0n}^n = \frac{6}{L^n} \int_0^{L^n} Mz dz$$

$$6EI_x \alpha_{0n}^{n+1} = \frac{6}{L^{n+1}} \int_0^{L^{n+1}} M(L^{n+1} - z) dz$$

Definiendo dos expresiones, que llamaremos Términos de Carga, de la siguiente forma:

$$\mathcal{R}^n = \frac{6}{(L^n)^2} \int_0^{L^n} Mz dz \quad \mathcal{L}^n = \frac{6}{(L^n)^2} \int_0^{L^n} M(L^n - z) dz$$

$$\mathcal{L}^{n+1} = \frac{6}{(L^{n+1})^2} \int_0^{L^{n+1}} M(L^{n+1} - z) dz$$

La ecuación queda:

$$M_{n-1}L^n + 2M_n(L^n + L^{n+1}) + M_{n+1}L^{n+1} + \mathcal{R}^n L^n + \mathcal{L}^{n+1} L^{n+1} + 6EI_x(\psi^{n+1} - \psi^n) = 0 \quad (10)$$

Donde \mathcal{R}^n y \mathcal{L}^{n+1} (términos de carga) tienen dimensión de momento (o sea Fuerza por Longitud) y se pueden calcular mediante las expresiones presentadas (o sacar de tablas) conociendo las dimensiones de la barra y las cargas.

12. Viga continua sobre apoyos elásticos

A continuación se presenta el caso que los apoyos no sean totalmente rígidos sino que tengan un cierto descenso cuando son cargados. Esta es una situación relativamente frecuente. Supondremos que los apoyos se comportan como elásticos (ver figura 14) o sea que se cumplirá que:

$$R_n = k_n \cdot v_n$$

Donde k_n será la constante elástica del apoyo n.

En este problema dejan de ser datos los descensos de los apoyos y pasan a ser incógnitas.



Figura 14: Viga continua sobre apoyos elásticos

Se cumplirá como ya vimos que:

$$\psi^n = \frac{v_n - v_{n-1}}{L^n}$$

$$\psi^{n+1} = \frac{v_{n+1} - v_n}{L^{n+1}}$$

Y sustituyendo los descensos por su expresión en función de las reacciones se tiene:

$$\psi^n = \frac{\frac{R_n}{k_n} - \frac{R_{n-1}}{k_{n-1}}}{L^n} =$$

$$= \frac{1}{k_n L^n} \left(R_{0n} + \frac{M_{n-1}}{L^n} - \frac{M_n}{L^n} - \frac{M_n}{L^{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{L^{n+1}} \right) - \frac{1}{k_{n-1} L^n} \left(R_{0n-1} + \frac{M_{n-2}}{L^{n-1}} - \frac{M_{n-1}}{L^{n-1}} - \frac{M_{n-1}}{L^n} + \frac{M_n}{L^n} \right) = \psi^n$$

Análogamente obtengo ψ^{n+1} .

Observar que:

- $\psi^n = f_1(M_{n-2}, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, R_{0n}, R_{0n-1})$
- $\psi^{n+1} = f_2(M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, M_{n+2}, R_{0n}, R_{0n+1})$

siendo ambas ecuaciones lineales.

Sustituyendo en la ecuación de tres momentos,

$$M_{n-1}\beta^n + M_n(\alpha_n^n + \alpha_n^{n+1}) + M_{n+1}\beta^{n+1} + \alpha_{0n}^n + \alpha_{0n}^{n+1} - \psi^n + \psi^{n+1} = 0$$

ésta queda de la forma:

$$A \cdot M_{n-2} + B \cdot M_{n-1} + C \cdot M_n + D \cdot M_{n+1} + E \cdot M_{n+2} + F \cdot R_{0,n-1} + G \cdot R_{0,n} + H \cdot R_{0,n+1} + \alpha_{0n}^n + \alpha_{0n}^{n+1} = 0 \quad (11)$$

Con

$$A = \frac{1}{k_{n-1}L^{n-1}L^n}$$

$$B = \beta^n - \frac{1}{k_n(L^n)^2} - \frac{1}{k_{n-1}L^{n-1}L^n} - \frac{1}{k_{n-1}(L^n)^2} - \frac{1}{k_nL^nL^{n+1}}$$

$$C = \alpha_n^n + \alpha_n^{n+1} + \frac{1}{k_n(L^n)^2} + \frac{2}{k_nL^nL^{n+1}} + \frac{1}{k_{n-1}(L^n)^2} + \frac{1}{k_{n+1}(L^{n+1})^2} + \frac{1}{k_n(L^{n+1})^2}$$

$$D = \beta^{n+1} - \frac{1}{k_nL^nL^{n+1}} - \frac{1}{k_{n+1}(L^{n+1})^2} - \frac{1}{k_{n+1}L^{n+1}L^{n+2}} - \frac{1}{k_n(L^{n+1})^2}$$

$$E = \frac{1}{k_{n+1}L^{n+1}L^{n+2}}$$

$$F = \frac{1}{k_{n-1}L^n}$$

$$G = -\frac{1}{k_nL^n} - \frac{1}{k_nL^{n+1}}$$

$$H = \frac{1}{k_{n+1}L^{n+1}}$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de los cinco momentos.

Si un apoyo es fijo (no es elástico) $k_n = \infty$ y se van todos los términos que lo tienen como divisor. En el caso que todos los apoyos sean rígidos se eliminan todos estos términos y quedan los mismos coeficientes que en la ecuación de tres momentos.

Si analizamos, por ejemplo, la ecuación del segundo apoyo ($n=1$):

$$R_{n-1} = R_0 = R_{00} + \frac{M_1}{L^1}$$

$$R_n = R_1 = R_{0,1} - \frac{M_1}{L^1} - \frac{M_1}{L^2} + \frac{M_2}{L^2}$$

En este caso (similar al de la ecuación de tres momentos) hay términos que no aparecen pues no existe el tramo 0, ni el momento M_0 , ni tampoco el apoyo -1 .

Los momentos M_0 y M_1 no aparecen en la ecuación de 5 momentos por lo que se puede tomar la expresión general y eliminar todos los términos que no tienen sentido, pues los tramos o los apoyos correspondientes no existen.

En la ecuación del tercer apoyo ($n = 2$) también hay términos que se eliminan. Lo mismo sucede para los apoyos $N-2$ y $N-1$ donde también hay términos que pierden sentido.

De manera similar al caso de la ecuación de tres momentos, si aparece un empotramiento aparece una incógnita adicional (el momento de empotramiento en ese apoyo) pero también surge una ecuación adicional (giro nulo en ese apoyo).

13. Ejemplo

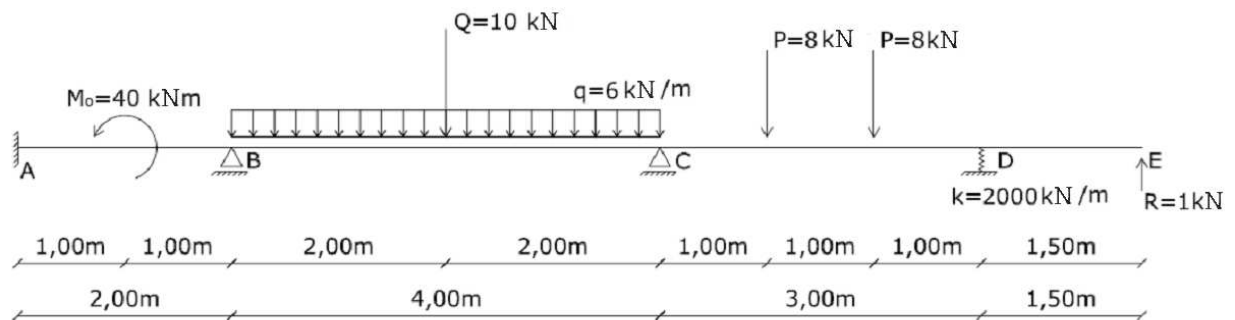


Figura 15: Viga continua con un extremo empotrado y un apoyo elástico

Dada la viga de la figura, se pide determinar el desplazamiento en D y realizar los diagramas de momento y cortante, sabiendo que el material es acero ($E=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$) y que la viga está conformada por un PNI20.

Resolución:

Tomaremos como unidad para las longitudes el metro y para las fuerzas el Newton. Los momentos estarán en consecuencia expresados en Newton \times metro y la constante del resorte en Newton/metro.

Empotramiento en A: Comenzamos planteando que dado el empotramiento en A, el giro en ese punto debe ser igual a cero. Por lo tanto:

$$\theta_A = 0$$

Utilizando la ecuación:

$$\alpha_{0A}^1 + \alpha_A^1 \cdot M_A + \beta^1 \cdot M_B + \psi = 0 \quad (12)$$

Siendo en la ecuación 12:

$$\alpha_{0A}^1 = \frac{M_0 L}{24 \cdot EI} = \frac{40000 \times 2}{24 \cdot EI}$$

$$\alpha_A^1 = \frac{L}{3 \cdot EI} = \frac{2}{3 \cdot EI}$$

$$\beta^1 = \frac{L}{6 \cdot EI} = \frac{2}{6 \cdot EI}$$

donde L es el largo del primer tramo (2 m) y $\psi=0$ ya que no hay descensos en los extremos del tramo AB.

Sustituyendo en la ecuación 7 obtenemos:

$$\frac{40000 \times 2}{24 \cdot EI} + \frac{2}{3 \cdot EI} \cdot M_A + \frac{2}{6 \cdot EI} \cdot M_B = 0$$

Como EI es constante la ecuación queda finalmente:

$$2 \cdot M_A + M_B = -10000 Nm \quad (13)$$

Continuidad en B: Planteamos la ecuación de 3 momentos en B. Atención: designaremos a las barras como, barra 1, barra 2 y barra 3 (barras AB, BC y CD respectivamente), estos serán los superíndices que utilizaremos para designar sus respectivas longitudes.

$$M_A \beta^1 + M_B (\alpha_B^1 + \alpha_B^2) + M_C \beta^2 + \alpha_{0B}^1 + \alpha_{0B}^2 - \psi^1 + \psi^2 = 0 \quad (14)$$

Donde,

$$\alpha_B^1 = \alpha_A^1 = \frac{L^1}{3 \cdot EI} = \frac{2}{3 \cdot EI}$$

$$\alpha_B^2 = \frac{L^2}{3 \cdot EI} = \frac{4}{3 \cdot EI}$$

$$\beta^2 = \frac{L^2}{6 \cdot EI} = \frac{4}{6 \cdot EI}$$

$$\alpha_{0B}^1 = -\alpha_{0A}^1 = -\frac{M_0 \cdot L^1}{24 \cdot EI} = -\frac{40000 \times 2}{24 \cdot EI}$$

$$\alpha_{0B}^2 = -\alpha_{0A}^2 = \frac{q \cdot (L^2)^3}{24 \cdot EI} + \frac{Q \cdot (L^2)^2}{16 \cdot EI} = \frac{6000 \times 4^3}{24 \cdot EI} + \frac{10000 \times 4^2}{16 \cdot EI}$$

El factor β^1 es el mismo que en el caso anterior, y los sumandos ψ^1 y ψ^2 son iguales a cero pues tampoco hay descenso de los apoyos. Sustituyendo en la ecuación 14 obtenemos:

$$M_A \frac{2}{6 \cdot EI} + M_B \left(\frac{2}{3 \cdot EI} + \frac{4}{3 \cdot EI} \right) + M_C \frac{4}{6 \cdot EI} - \frac{40000 \times 2}{24 \cdot EI} + \frac{6000 \times 4^3}{24 \cdot EI} + \frac{10000 \times 4^2}{16 \cdot EI} = 0$$

Como EI es constante la ecuación queda finalmente:

$$M_A + 6 \cdot M_B + 2 \cdot M_C = -68000 Nm \quad (15)$$

Continuidad en C: Planteamos la ecuación de tres momentos en C, según los términos de carga:

$$M_B \cdot L^2 + 2 \cdot M_C (L^2 + L^3) + M_D \cdot L^3 + L^2 \cdot \mathcal{R}^2 + L^3 \cdot \mathcal{L}^3 + 6 \cdot EI (\psi^3 - \psi^2) = 0 \quad (16)$$

De la tabla de términos de carga sabemos que,

$$\mathcal{R}^2 = \frac{3}{8}Q \cdot L^2 + \frac{1}{4}q \cdot (L^2)^2 = \frac{3}{8} \cdot 10000 \times 4 + \frac{1}{4} \cdot 6000 \times 4^2 = 39000 Nm$$

$$\mathcal{L}^3 = \frac{2}{3} \cdot P \cdot L^3 = \frac{2}{3} \cdot 8000 \times 3 = 16000 Nm$$

Además, como dijimos anteriormente, ψ^2 es igual a cero.

Determinemos entonces ψ^3 :

$$\psi^3 = \frac{v_D - v_C}{L^3} = \frac{\frac{R_D}{k} - 0}{3} = \frac{R_D}{2 \times 10^6 \times 3}$$

Para determinar R_D , utilizamos la ecuación 8. Atención, observar la figura 16, allí se ve, que para poder introducir en el estudio el efecto producido por la ménsula, es necesario cortarla y trasladar al punto D la fuerza y el momento correspondiente.

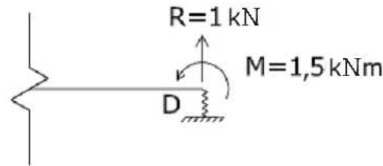


Figura 16: Estudio de la ménsula

De esta forma, la reacción en D será:

$$R_D = P - R + \frac{1}{L^3}(M_C - M_D) = 8000 - 1000 + \frac{M_C}{3} - \frac{1500}{3}$$

Notar que la parte isostática de la reacción son los términos P-R siendo P la resultante de la parte isostática de la viga CD y -R de la ménsula. Notar también el uso de los signos de los momentos.

Ahora estamos listos para sustituir todos los términos en la ecuación 16, para finalmente obtener:

$$4 \cdot M_B + 15,498 \cdot M_C = -237711 Nm \quad (17)$$

Con las ecuaciones 13, 15 y 17 tenemos un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones y 3 incógnitas, que al resolverlo nos da los momentos incógnita:

$$M_A = -1757,13 Nm$$

$$M_B = -6485,74 Nm$$

$$M_C = -13664,22 Nm$$

Para hallar el desplazamiento en el punto D sabemos que:

$$v_D = \frac{R_D}{k} = \left(8000 - 1000 + \frac{-13664,22}{3} - \frac{1500}{3} \right) \frac{1}{2,0 \times 10^6} = 0,000973 m = 0.973 mm$$

Para hallar los diagramas de cortante y momento empezamos hallando el resto de las reacciones:

$$R_A = \frac{M_0}{L^1} + \frac{1}{L^1}(M_B - M_A) = 17635,70 N$$

$$R_B = -\frac{M_0}{L^1} + \frac{Q \cdot L^2/2 + q \cdot (L^2)^2/2}{L^2} + \frac{1}{L^1}(M_A - M_B) + \frac{1}{L^2}(M_C - M_B) = -2430,32N$$

$$R_C = \frac{Q \cdot L^2/2 + q \cdot (L^2)^2/2}{L^2} + P + \frac{1}{L^2}(M_B - M_C) + \frac{1}{L^3}(M_D - M_C) = 31849,36N$$

Los diagramas quedan entonces de la siguiente forma:

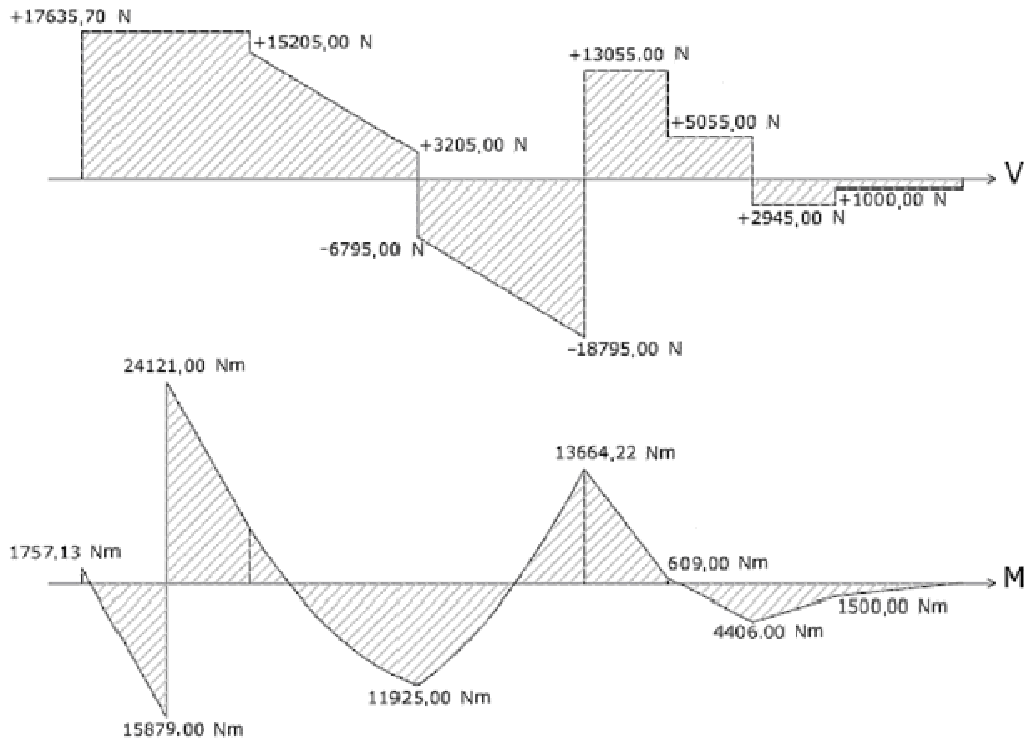


Figura 17: Diagrama de cortante y momento flector

*Estos apuntes fueron elaborados por:
Dr. Ing. Atilio Morquio
Ing. Lucía Delacoste*

*Colaboraron en la corrección:
Ing. María Laura Reboledo
Ing. Valentina Machín
Ing. Agustín Spalvier*