

Secciones Compuestas

Secciones Compuestas

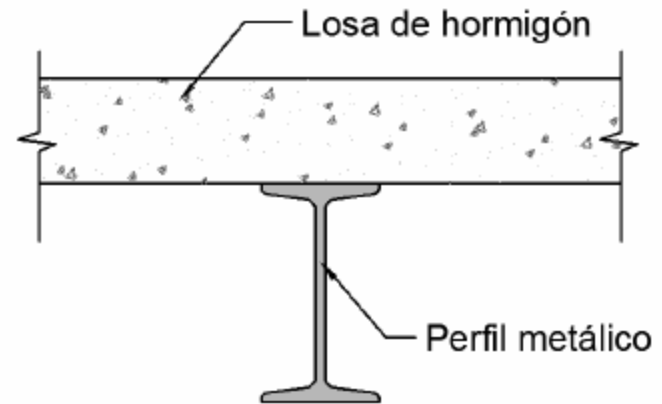
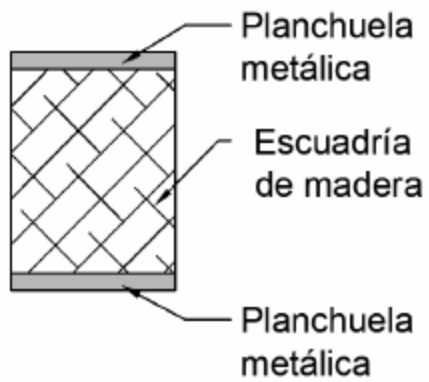


Figura 1: Ejemplos usuales de vigas con secciones compuestas

Hipótesis

Las secciones planas se mantienen **planas y perpendiculares** al eje de la viga luego de la flexión (Navier). Por lo que las deformaciones unitarias serán proporcionales a la distancia a la línea neutra. Ambos materiales también cumplen con la **Ley de Hooke**.

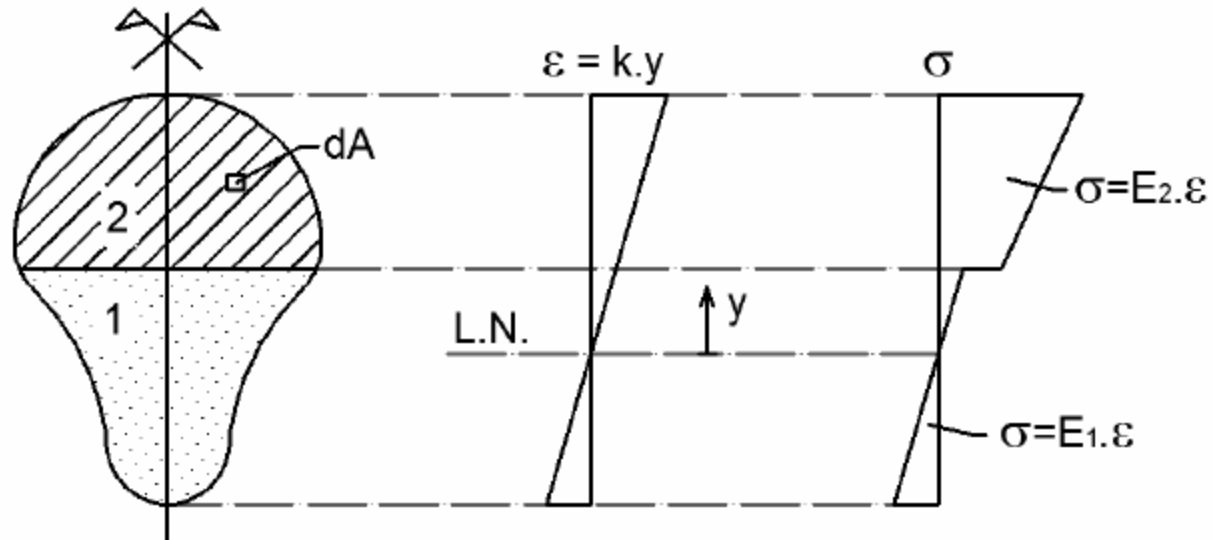
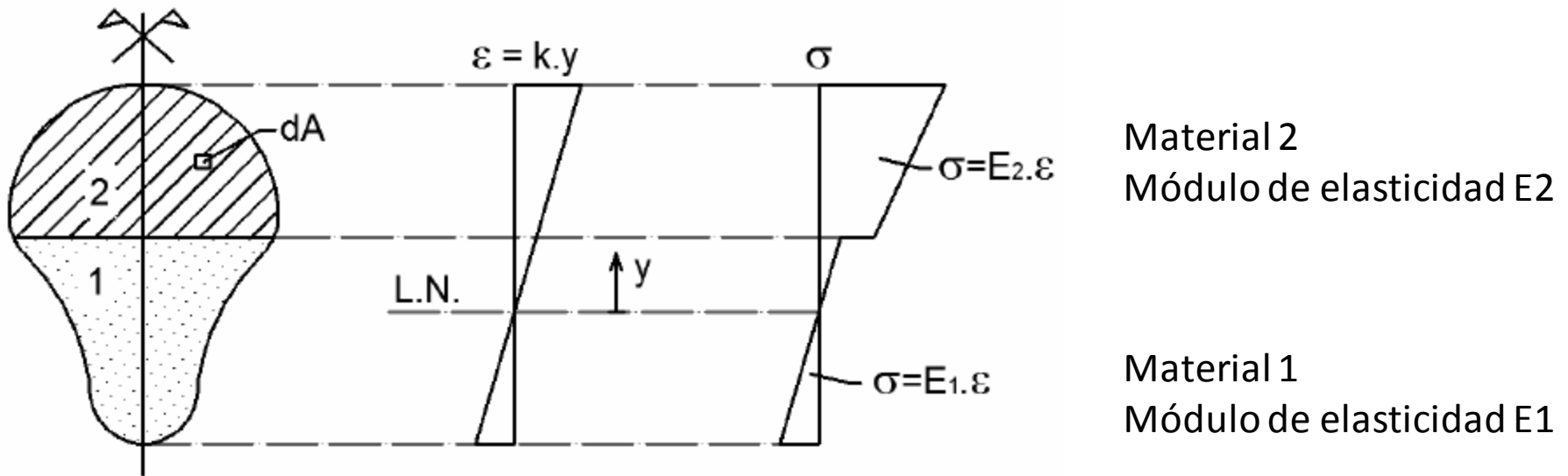


Figura 2: Sección compuesta y sus diagramas de deformaciones y tensiones



Supondremos que $E_1 < E_2$,

Las def. unitarias: $\epsilon = k \cdot y$

→ Al cumplir la ley de Hooke: $\sigma_1 = \epsilon \cdot E_1 = k \cdot y \cdot E_1$
 $\sigma_2 = \epsilon \cdot E_2 = k \cdot y \cdot E_2$

Para determinar la LN y la constante k , igualamos los esfuerzos internos a las fuerzas externas

$$N = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA$$

$$M = \int_{A_1} \sigma_1 \cdot y dA + \int_{A_2} \sigma_2 \cdot y dA$$

$$N = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = \int_{A_1} E_1 k y dA + \int_{A_2} E_2 k y dA$$

$$N = kE_1 \left[\int_{A_1} y dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y dA \right]$$

$$M = \int_{A_1} \sigma_1 \cdot y dA + \int_{A_2} \sigma_2 \cdot y dA = \int_{A_1} E_1 k y \cdot y dA + \int_{A_2} E_2 k y \cdot y dA$$

$$M = kE_1 \left[\int_{A_1} y^2 dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y^2 dA \right]$$

Definiendo $\frac{E_2}{E_1} = n$

$$N = kE_1 \left[\int_{A_1} y dA + n \int_{A_2} y dA \right]$$

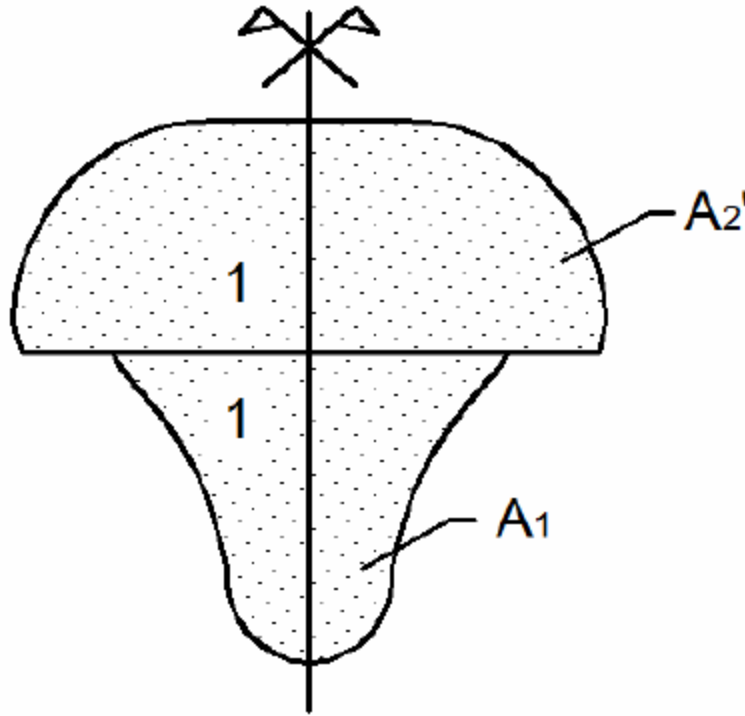
$$M = kE_1 \left[\int_{A_1} y^2 dA + n \int_{A_2} y^2 dA \right]$$

$$n \int_{A_2} y dA = \int_{A_2'} y dA$$

$$n \int_{A_2} y^2 dA = \int_{A_2'} y^2 dA$$

Multiplicando el ancho de la **zona 2 por n**, el problema original de 2 materiales puede ser sustituido por un problema equivalente con un material solo de módulo E_1 y área igual a **$A_1 + A_2'$** , lo que es más sencillo y sabemos resolver.

Sección homogénea equivalente



Cambiamos los ejes al baricentro

$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_G + ky$$

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon = E_1 ky + E_1 \varepsilon_G$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon = E_2 ky + E_2 \varepsilon_G$$

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = \int_{A_1} E_1 (ky + \varepsilon_G) dA + \int_{A_2} E_2 (ky + \varepsilon_G) dA \\ &= kE_1 \left[\int_{A_1} y dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y dA \right] + \varepsilon_G E_1 \left[\int_{A_1} dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} dA \right] \end{aligned}$$

$$= kE_1 \left[\int_{A_1} y dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y dA \right] + \varepsilon_G E_1 \left[\int_{A_1} dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} dA \right]$$

$A_1 + n.A_2$

0= momento de primer orden respecto al baricentro

$$N = \varepsilon_G E_1 A_h$$

$$N=0 \rightarrow \varepsilon_G=0$$

$$M = \int_{A_1} \sigma_1 \cdot y dA + \int_{A_2} \sigma_2 \cdot y dA$$

$$= \int_{A_1} E_1 (ky + \varepsilon_G) y dA + \int_{A_2} E_2 (ky + \varepsilon_G) y dA$$

$$M = kE_1 \left[\int_{A_1} y^2 dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y^2 dA \right] + \epsilon_G E_1 \left[\int_{A_1} y dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y dA \right]$$

$$M = kE_1 I_h$$

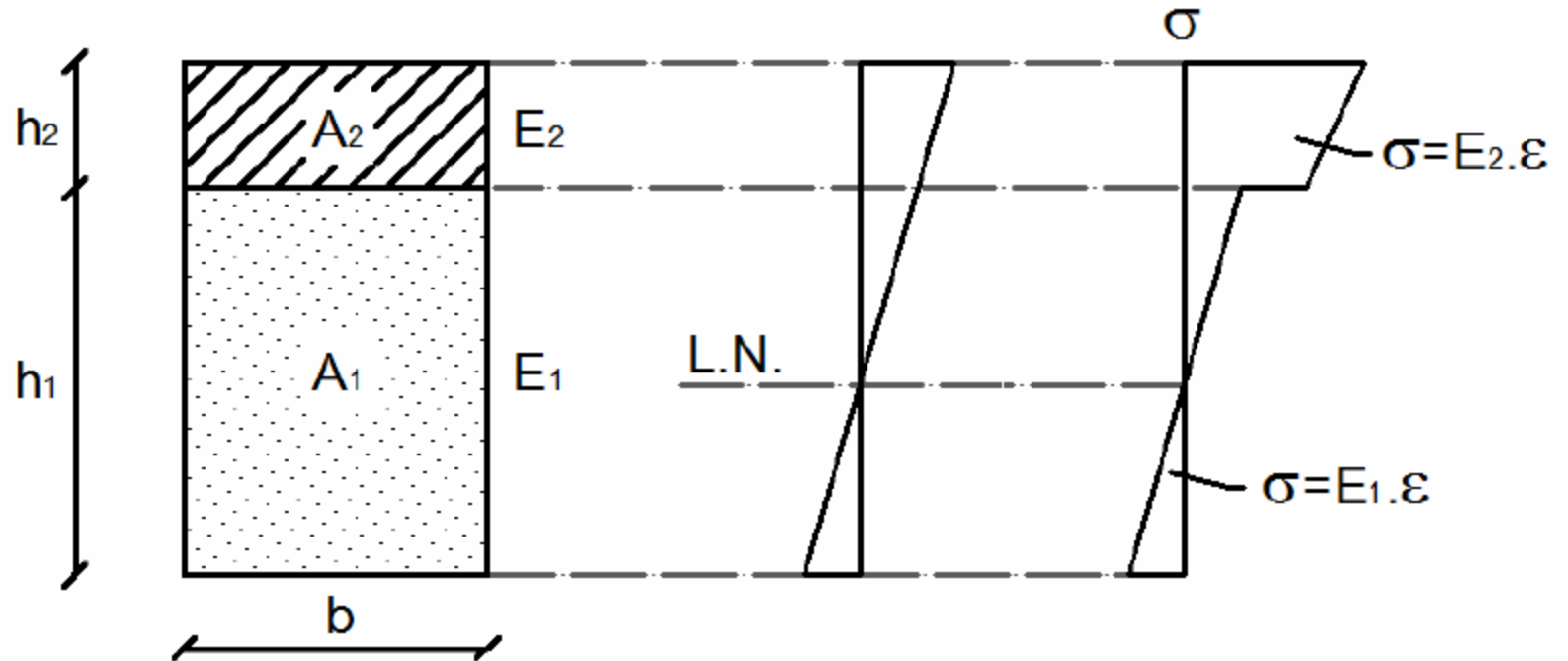
Tensiones Normales

$$M = kE_1I_h \quad \rightarrow \quad k = \frac{M}{E_1I_h}$$

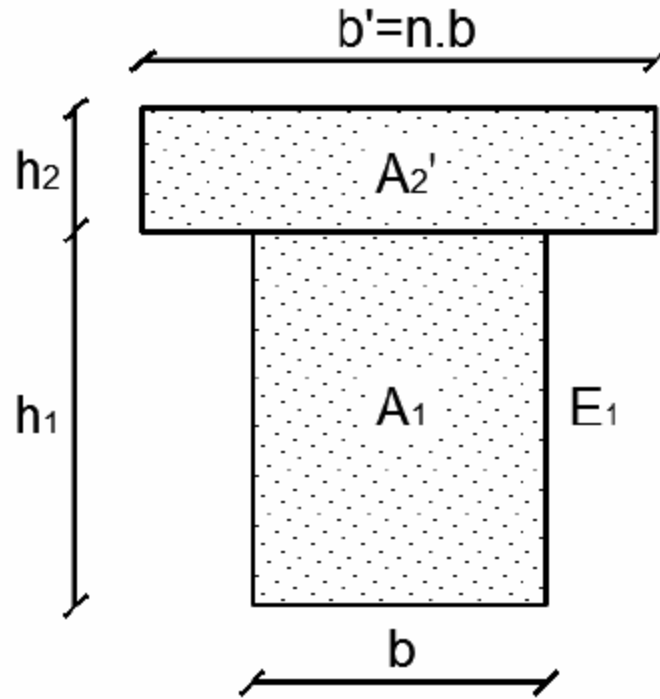
$$\sigma_1(y) = \frac{M \cdot y}{I_h} + E_1 \varepsilon_G = \frac{M \cdot y}{I_h} + \frac{N}{A_h}$$

$$\sigma_2(y) = \frac{E_2}{E_1} \frac{M \cdot y}{I_h} + \frac{E_2}{E_1} E_1 \varepsilon_G = n \cdot \left(\frac{M \cdot y}{I_h} + \frac{N}{A_h} \right)$$

Secciones en bandas horizontales



Sección homogeneizada



Tensiones Rasantes

$$\tau = \frac{V \cdot \mu}{I \cdot b}$$

V es el valor del cortante en la sección en estudio.

μ es el momento de primer orden del tramo de sección que se encuentra por encima de la fibra donde se está hallando la tensión, respecto del baricentro.

I es la inercia de la sección considerada (respecto de su baricentro).

b es el ancho de la sección a la altura de la fibra donde se está hallando la tensión.

$$\tau = \frac{V \cdot \mu_h}{I_h \cdot b}$$

V es el valor del cortante en la sección en estudio.

μ_h es el momento de primer orden del tramo de sección homogénea que se encuentra por encima de la fibra donde se está hallando la tensión, respecto del baricentro de la sección homogénea.

I_h es la inercia de la sección homogénea (respecto de su baricentro).

Dimensionado

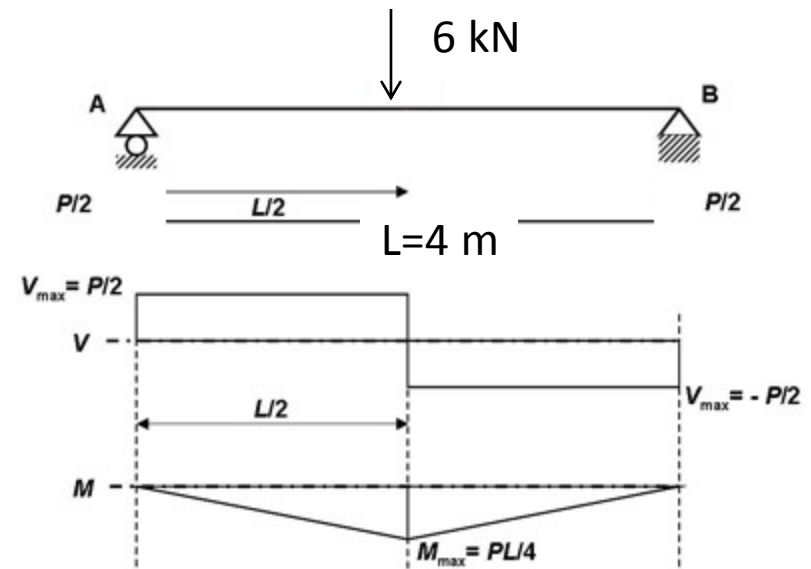
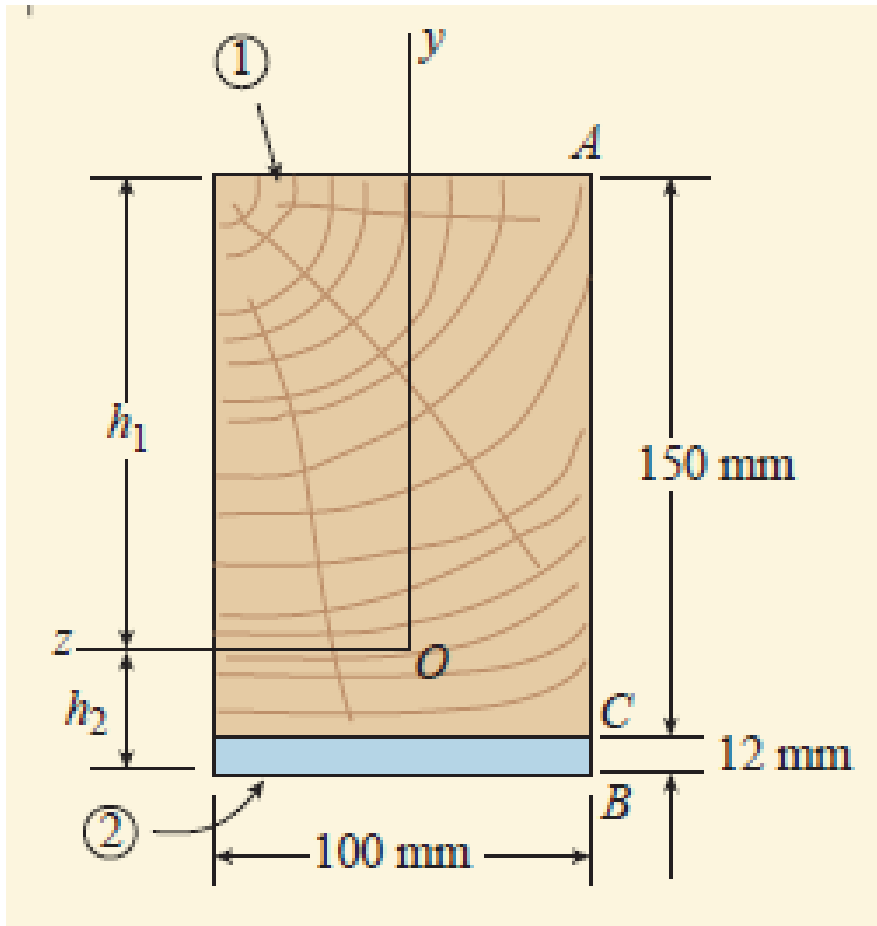
Llamaremos “ R ” a la fuerza rasante en una longitud s de la viga

$$R = \tau \cdot b \cdot s = \frac{V \cdot \mu_h}{I_h \cdot b} \cdot b \cdot s \rightarrow R = \frac{V \cdot \mu_h}{I_h} \cdot s$$

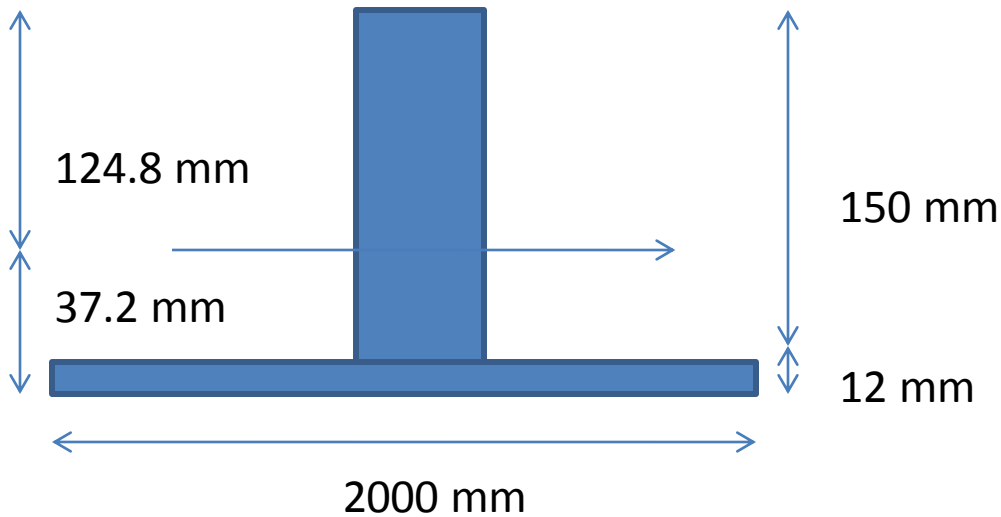
En general nos interesará determinar el valor de la fuerza R en la superficie de contacto entre un material y otro, a los efectos de dimensionar la unión que deberá transmitir dicho esfuerzo entre las partes.

Sección Compuesta

$$E_{\text{Madera}} = 10.5 \text{ GPa} \quad E_{\text{Acero}} = 210 \text{ GPa}$$



Sección Compuesta



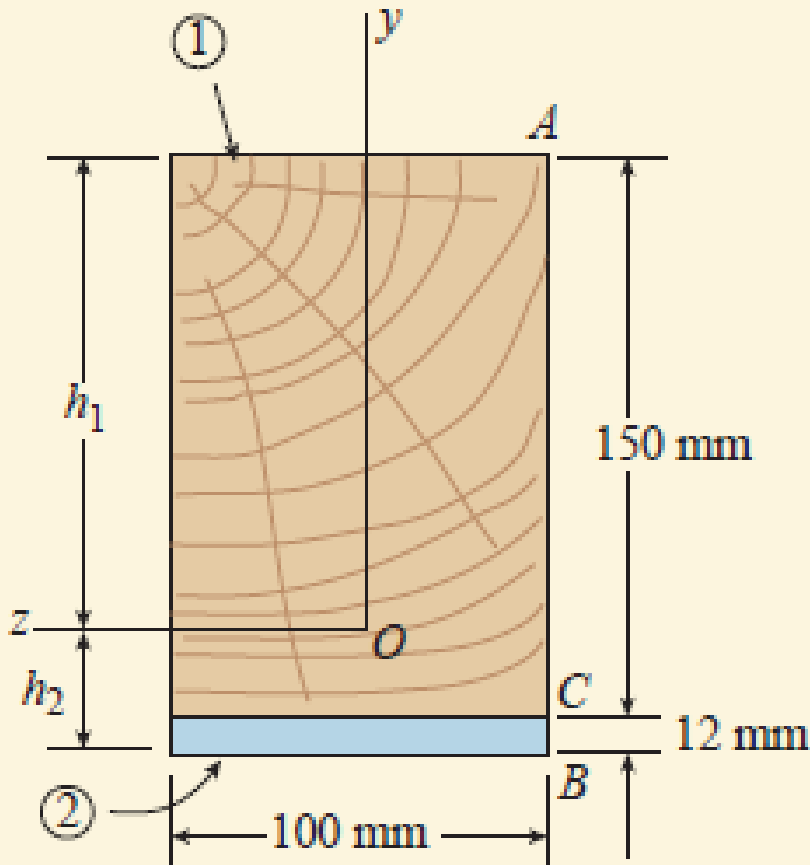
$$y_G = \frac{(150 \cdot 100) \cdot 75 + (2000 \cdot 12) \cdot 156}{(150 \cdot 100) + (2000 \cdot 12)}$$

$$y_G = 124.8 \text{ mm}$$

$$I_{\text{homog}} = 100 \cdot (150)^3 / 12 + ((124.8 - 75)^2 \cdot (100 \cdot 150)) + 2000 \cdot 12^3 / 12 + 12 \cdot 2000 \cdot (37.2 - 6)^2$$

$$I_{\text{homog}} = 8.898 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

Sección Compuesta



$$\sigma_A = E_1 \cdot \varepsilon \quad k = M/EI$$

$$\sigma_A = E_1 \cdot \varepsilon = E_1 \cdot k \cdot y = E_1 \cdot y \cdot M / (E_1 I)$$

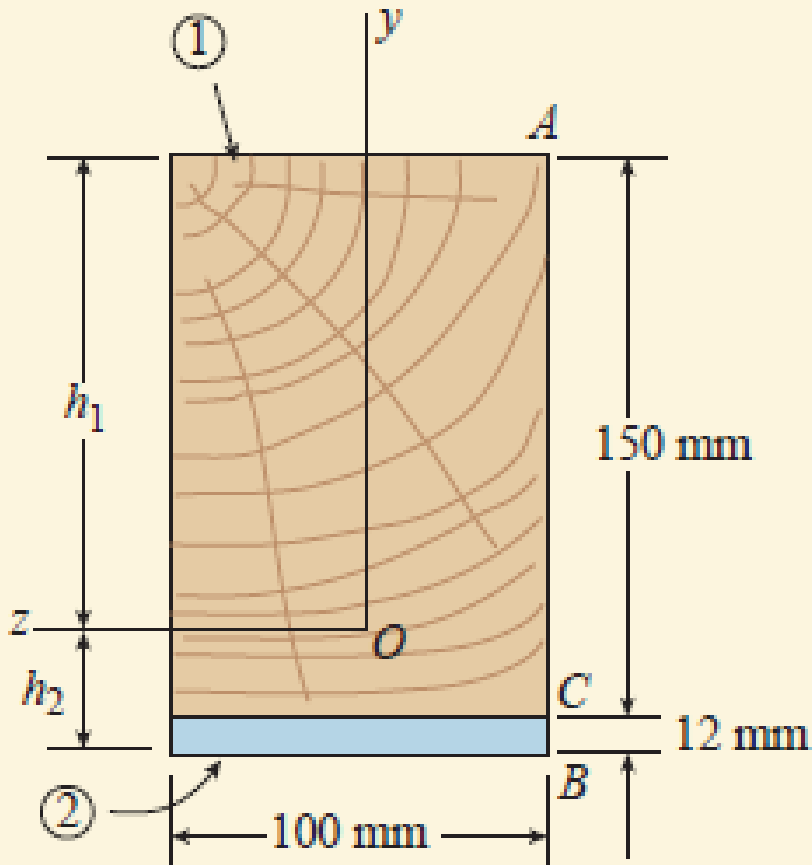
$$\sigma_A = - 10.5 \text{ GPa} \cdot 6 \text{ kNm} \cdot 0.1248 / (E_1 I_{\text{homg}})$$

$$\sigma_A = - 8.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{C1} = 10.5 \text{ GPa} \cdot 6 \text{ kNm} \cdot 0.0252 / (E_1 I_{\text{homg}})$$

$$\sigma_{C1} = 1.7 \text{ MPa}$$

Sección Compuesta



$$\sigma_A = E_1 \cdot \varepsilon \quad k = M/EI$$

$$\sigma_A = E_1 \cdot \varepsilon = E_1 \cdot k \cdot y = E_1 \cdot y \cdot M / (E_1 I)$$

$$\sigma_{C1} = 1.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{C1} = 10.5 \text{ GPa} \cdot 6 \text{ kNm} \cdot 0.0252 / (E_1 I_{\text{homg}})$$

$$\sigma_{C2} = 210 \text{ GPa} \cdot 6 \text{ kNm} \cdot 0.0252 / (E_1 I_{\text{homg}})$$

$$\sigma_{C2} = 34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 210 \text{ GPa} \cdot 6 \text{ kNm} \cdot 0.0372 / (E_1 I_{\text{homg}})$$

$$\sigma_B = 50.2 \text{ MPa}$$

Sección Compuesta

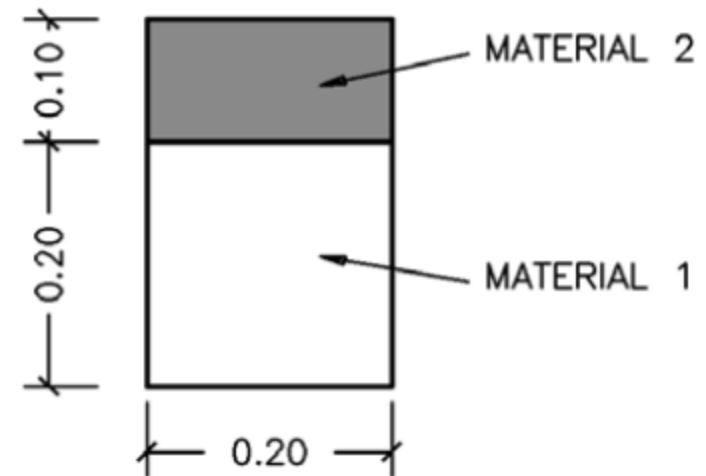
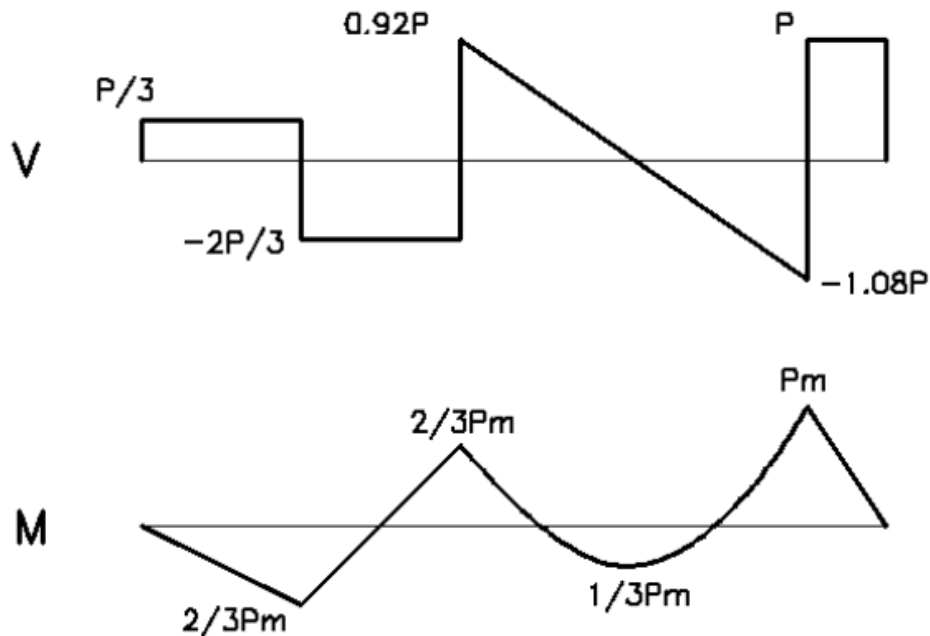
$$\tau_G = 3 \text{ kN} \cdot (124.8 \cdot 100) \cdot 124.8 / 2 / (I_{\text{homog}} \cdot b) = 262 \text{ kPa}$$

$$\tau_{C1} = 3 \text{ kN} \cdot ((124.8 \cdot 100) \cdot 124.8 / 2) -$$

$$(25.2 \cdot 100) \cdot 25.2 / 2 / (I_{\text{homog}} \cdot b) = 252 \text{ kPa}$$

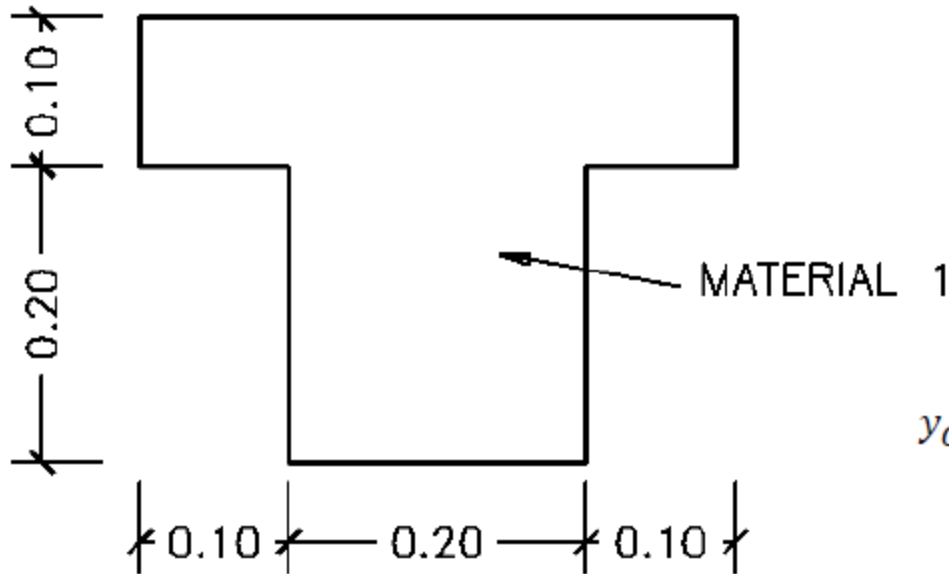
$$\tau_{C2} = 3 \text{ kN} \cdot (2000 \cdot 12) \cdot (25.2 + 6) / (I_{\text{homog}} \cdot b) = 252 \text{ kPa}$$

Ejemplo



- $E_2/E_1=2$
- $P=20$ kN
- Tensiones admisibles: $\sigma_{adm,1} = 6$ MPa y $\sigma_{adm,2} = 9$ MPa
- Aplastamiento: σ_{adm}^{aplast} (mat.1) = 10 MPa y σ_{adm}^{aplast} (mat. 2) = 15 MPa.

Sección Homogeneizada



$$y_{G,hom} = \frac{20^2 \cdot 10 + 40 \cdot 10 \cdot 25}{20^2 + 40 \cdot 10} = 17.5 \text{ cm}$$

$$I_{x,hom} = \frac{20^4}{12} + 20^2 \cdot (10 - 17.5)^2 + \frac{40 \cdot 10^3}{12} + 40 \cdot 10 \cdot (25 - 17.5)^2 = 61666.7 \text{ cm}^4$$

Conectores

$$\tau \cdot b = \frac{V \cdot \mu_{hom}(\text{unión})}{I_{x,hom}}$$

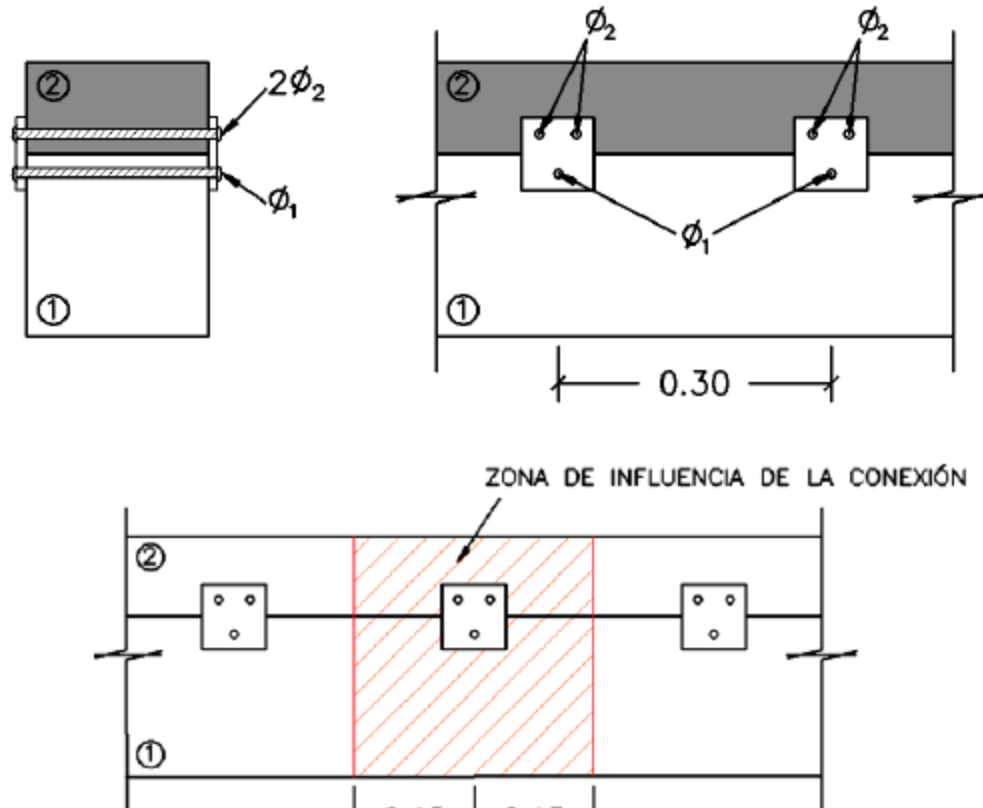
$$\mu_{hom}(\text{unión}) = 40 \cdot 10 \cdot (25 - 17.5) = 3000 \text{ cm}^3$$

$$I_{x,hom} = 61667 \text{ cm}^4$$

$$V = 1.08 \cdot P = 21.6 \text{ kN}$$

$$\tau \cdot b = \frac{21.6 \cdot 3000}{61667} = 1.05 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

Conectores

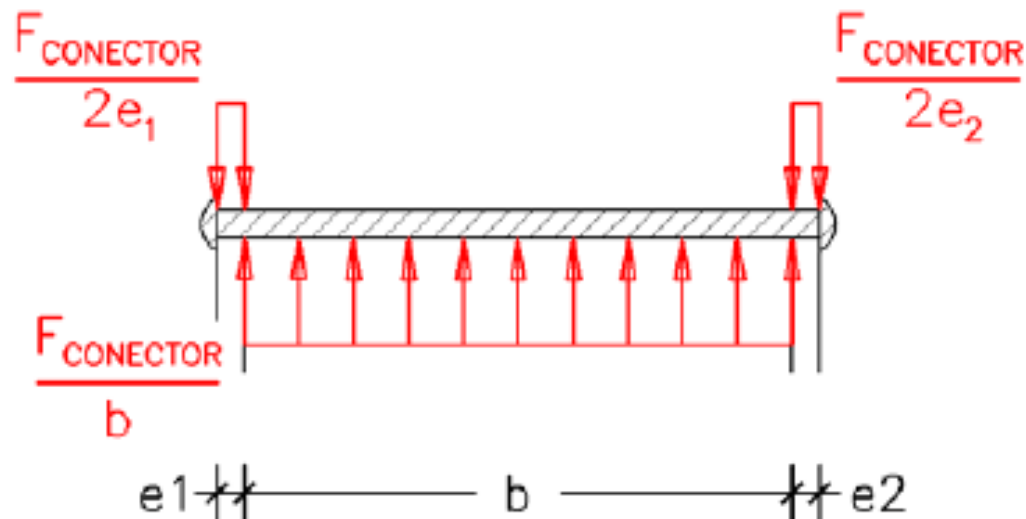


$$F_{\text{conexión}} = \tau \cdot b \cdot s = 1.05 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \cdot 30 \text{ cm} = 31.5 \text{ kN}$$

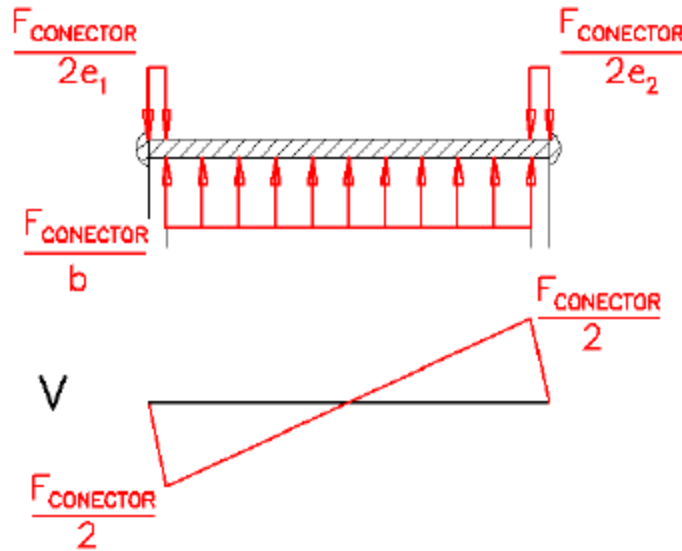
Conectores

$$F_{\text{conectores sup}} = \frac{F_{\text{conexión}}}{2} = \frac{31.5 \text{ kN}}{2} = 15.75 \text{ kN}$$

$$F_{\text{conectores inf}} = \frac{F_{\text{conexión}}}{1} = \frac{31.5 \text{ kN}}{1} = 31.5 \text{ kN}$$



Conectores



resistencia admisible al corte ($\tau_{adm} = 70 \text{ MPa}$)

$$V_{\text{conector}}^{\text{máx}} \text{ (corte doble)} = \frac{F_{\text{conector}}}{2}$$

Tenemos que:

$$\tau_{\text{conector sup}}^{\text{máx}} = \frac{V_{\text{conector sup}}^{\text{máx}}}{A_{\text{conector sup}}} = \frac{\frac{15.75 \text{ kN}}{2}}{\pi \cdot \Phi_2^2 / 4} \leq \tau_{adm} = 7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \rightarrow \Phi_2 \geq 1.20 \text{ cm}$$

$$\tau_{\text{conector inf}}^{\text{máx}} = \frac{V_{\text{conector inf}}^{\text{máx}}}{A_{\text{conector inf}}} = \frac{\frac{31.5 \text{ kN}}{2}}{\pi \cdot \Phi_1^2 / 4} \leq \tau_{adm} = 7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \rightarrow \Phi_1 \geq 1.69 \text{ cm}$$

Aplastamiento del Material

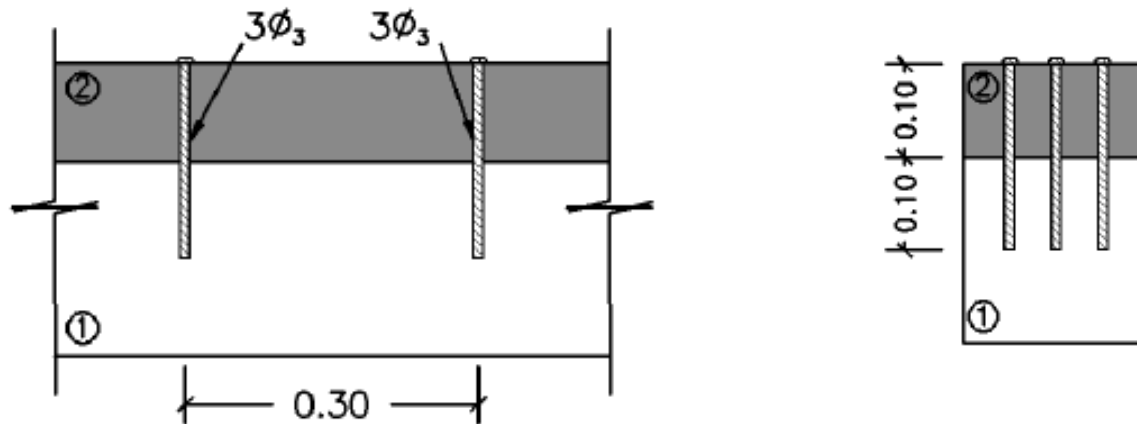
$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conector}}{\emptyset \cdot l}$$

El material 2 está en contacto con los conectores superiores:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores\ sup}}{\emptyset_2 \cdot l} = \frac{15.75\ kN}{\emptyset_2 \cdot 20\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.50 \frac{kN}{cm^2} \rightarrow \emptyset_2 \geq \mathbf{0.53\ cm}$$

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores\ inf}}{\emptyset_1 \cdot l} = \frac{31.5\ kN}{\emptyset_1 \cdot 20\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.00 \frac{kN}{cm^2} \rightarrow \emptyset_1 \geq \mathbf{1.58\ cm}$$

Conectores

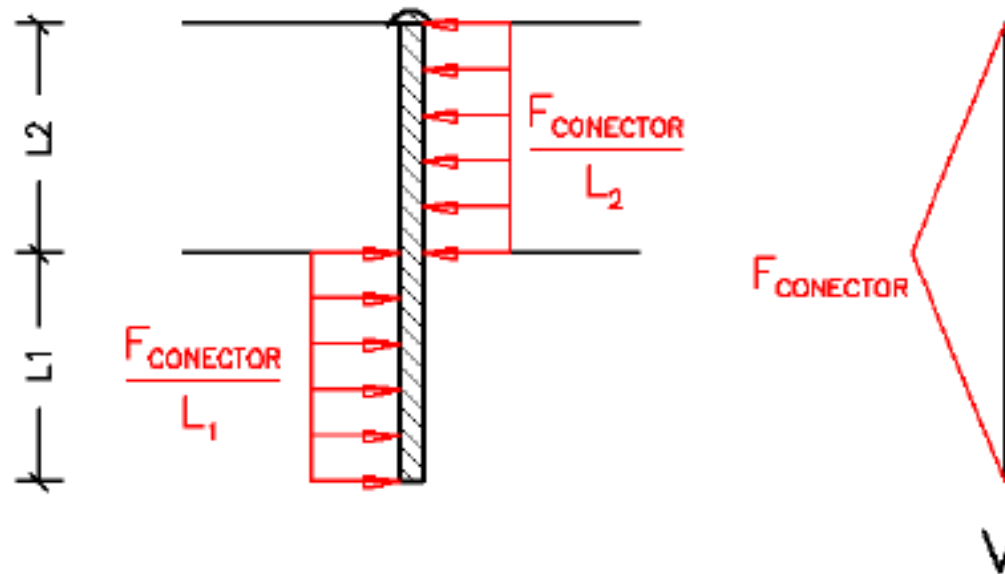


$$\tau \cdot b = \frac{21.6 \cdot 3000}{61667} = 1.05 \frac{kN}{cm}$$

$$F_{conexión} = \tau \cdot b \cdot s = 1.05 \frac{kN}{cm} \cdot 30 \text{ cm} = 31.5 \text{ kN}$$

Conectores

$$F_{conector} = \frac{F_{conexión}}{3} = \frac{31.5 \text{ kN}}{3} = 10.5 \text{ kN}$$



$$V_{conector}^{m\acute{a}x} \text{ (corte simple)} = F_{conector}$$

Conectores

$$\tau_{conector} = \frac{V_{conector}}{A_{conector}}$$

$$\tau_{conector}^{m\acute{a}x} = \frac{V_{conector}^{m\acute{a}x}}{A_{conector}} = \frac{10.5 \text{ kN}}{\pi \cdot \phi_3^2 / 4} \leq \tau_{adm} = 7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \rightarrow \phi_3 \geq \mathbf{1.38 \text{ cm}}$$

En el material 2:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores}}{\phi_3 \cdot l} = \frac{10.5 \text{ kN}}{\phi_3 \cdot 10 \text{ cm}} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.50 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \rightarrow \phi_3 \geq \mathbf{0.70 \text{ cm}}$$

En el material 1:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores}}{\phi_3 \cdot l} = \frac{10.5 \text{ kN}}{\phi_3 \cdot 10 \text{ cm}} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.00 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \rightarrow \phi_3 \geq \mathbf{1.05 \text{ cm}}$$

Tensiones Normales

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon = E_1 k y = E_1 \frac{M}{E_1 \cdot I_{hom}} y = \frac{2000}{61666.7} y = 0.0324 y$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon = E_2 k y = E_2 \frac{M}{E_1 \cdot I_{hom}} y = 2 \frac{2000}{61666.7} y = 0.0649 y$$

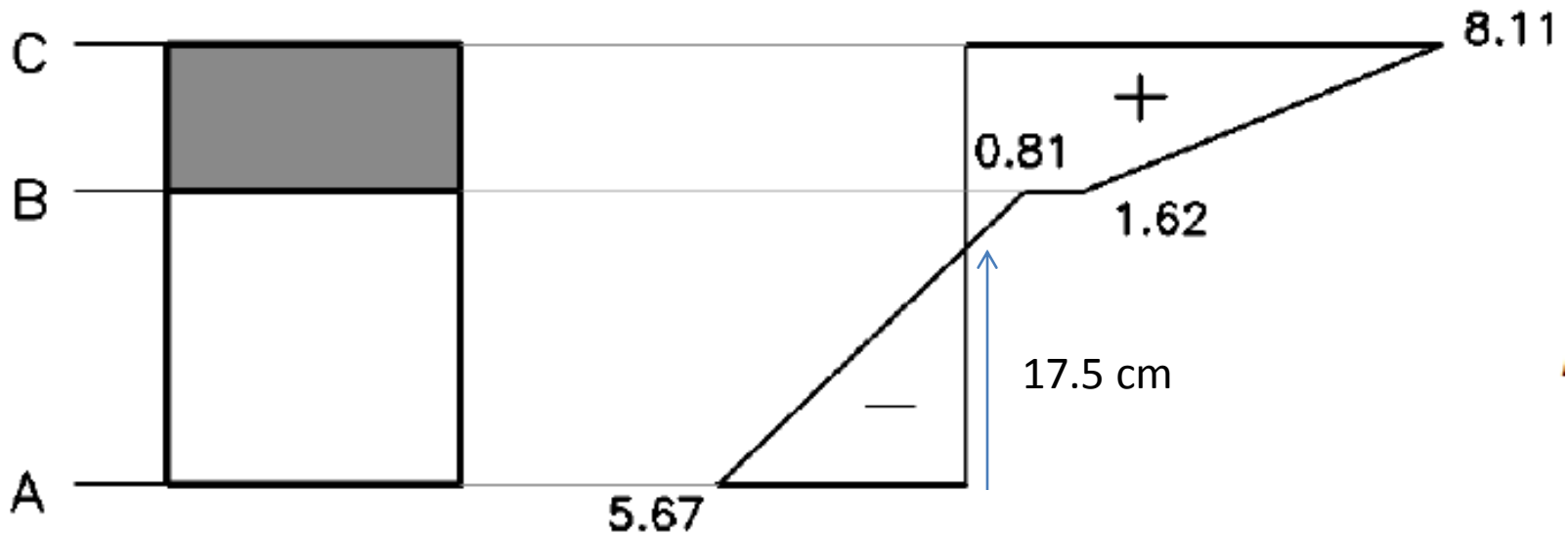
$$\sigma_1 (A) = 0.0324 \cdot 17.5 = 0.567 \frac{kN}{cm^2} = 5.67 MPa < 6 MPa$$

$$\sigma_1 (B) = 0.0324 \cdot 2.5 = 0.081 \frac{kN}{cm^2} = 0.81 MPa < 6 MPa$$

$$\sigma_2 (B) = 0.0649 \cdot 2.5 = 0.162 \frac{kN}{cm^2} = 1.62 MPa < 9 MPa$$

$$\sigma_2 (C) = 0.0649 \cdot 12.5 = 0.811 \frac{kN}{cm^2} = 8.11 MPa < 9 MPa$$

Tensiones Normales



$$\sigma_1(A) = 0.0324 \cdot 17.5 = 0.567 \frac{kN}{cm^2} = 5.67 MPa < 6 MPa$$

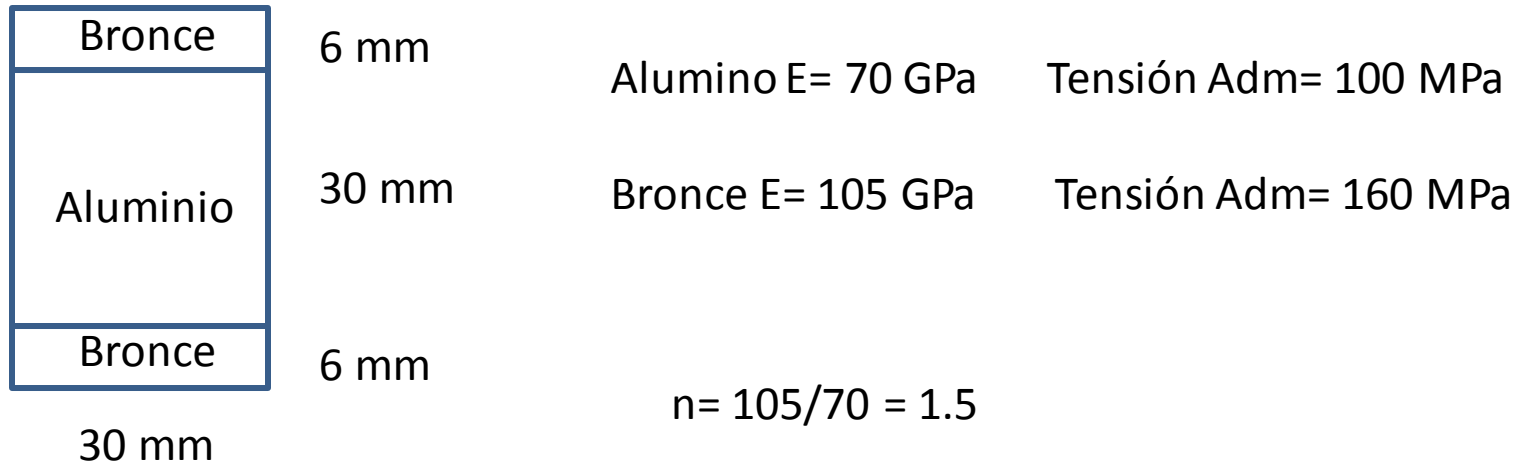
$$\sigma_1(B) = 0.0324 \cdot 2.5 = 0.081 \frac{kN}{cm^2} = 0.81 MPa < 6 MPa$$

$$\sigma_2(B) = 0.0649 \cdot 2.5 = 0.162 \frac{kN}{cm^2} = 1.62 MPa < 9 MPa$$

$$\sigma_2(C) = 0.0649 \cdot 12.5 = 0.811 \frac{kN}{cm^2} = 8.11 MPa < 9 MPa$$

Ejemplo

Hallar el momento máximo que puede resistir una viga de sección:

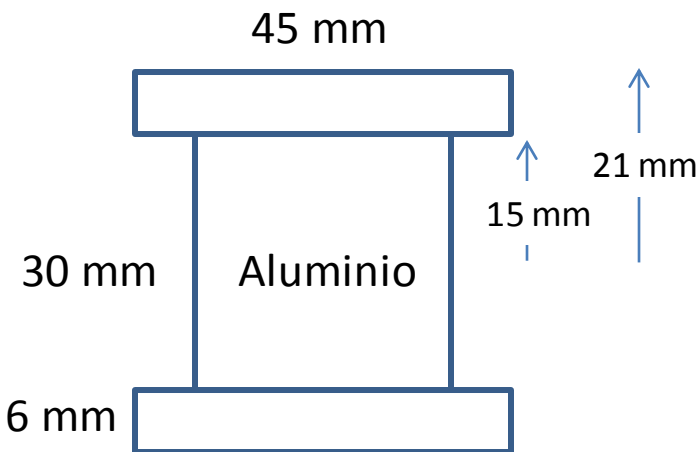


$$I = 30 \cdot 30^3/12 + 2 \cdot 1.5 \cdot ((30 \cdot 6^3)/12 + 30 \cdot 6 \cdot 18^2) = 244.08 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 244.08 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Tensiones

$$\text{Tensión} = M/W$$

Sección Homogenizada



Tensión Adm Alum= 100 MPa

$$\text{Tensión Max Aluminio} = M/(I/0.015)$$

$$100 \text{ MPa} \geq M/0.1672$$

$$M \leq 16.3 \text{ MN.m}$$

La tensión en el material homogeneizado debe ser mayorada por 1.5

Tensión Max Bronce = 160 MPa

$$160 \text{ MPa} \geq n \cdot M/(I/0.021)$$

$$M \leq 18.6 \text{ MN.m} / 1.5$$

$$M \leq 12.4 \text{ kN.m}$$