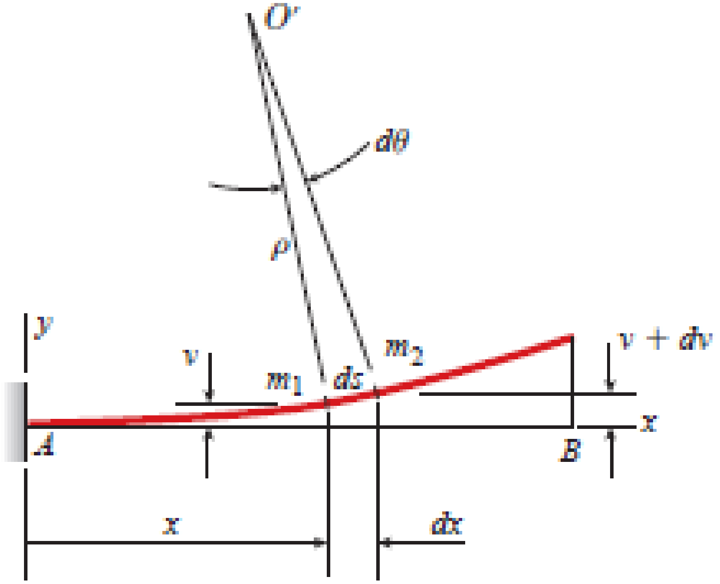
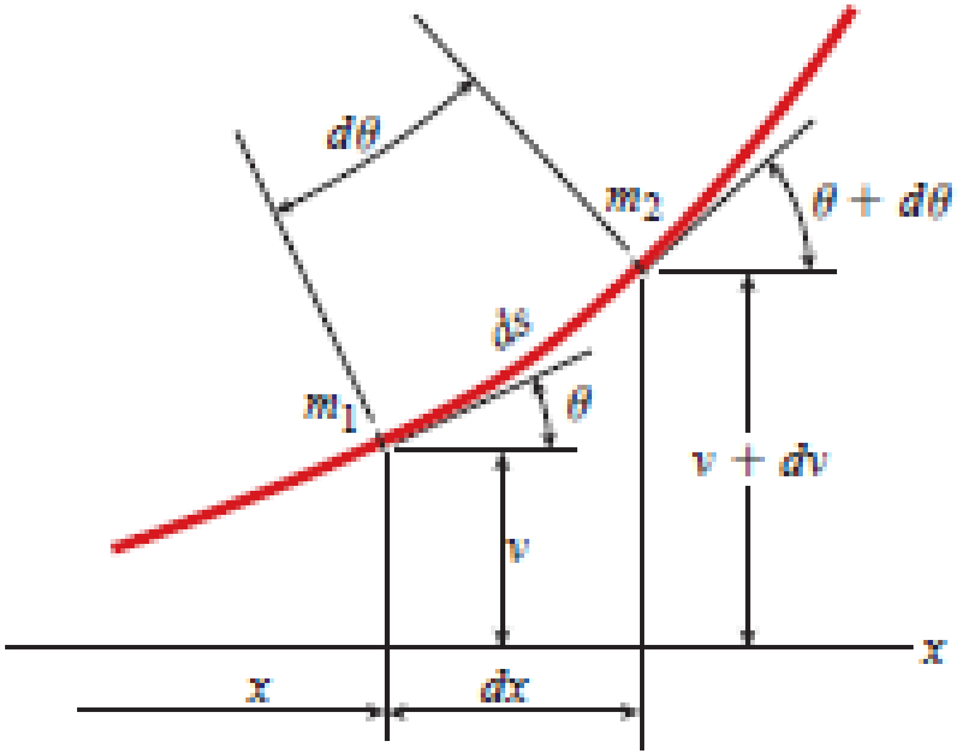
Teoría de vigas

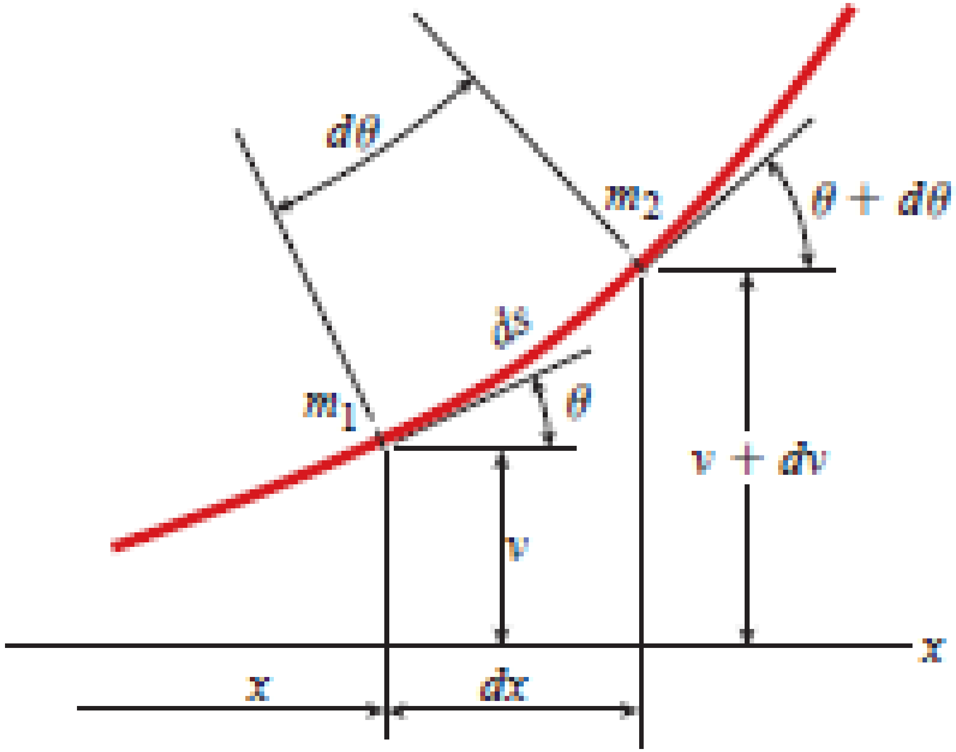
3era Parte

Deflexiones ("Elástica") de la viga





Deflexiones (“Elástica”) de la viga



κ=1/ρ: ***Curvatura***
v: ***desplazamiento perp. al eje***
ϑ: ***ángulo de giro***

$$\rho \, d\theta = ds$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

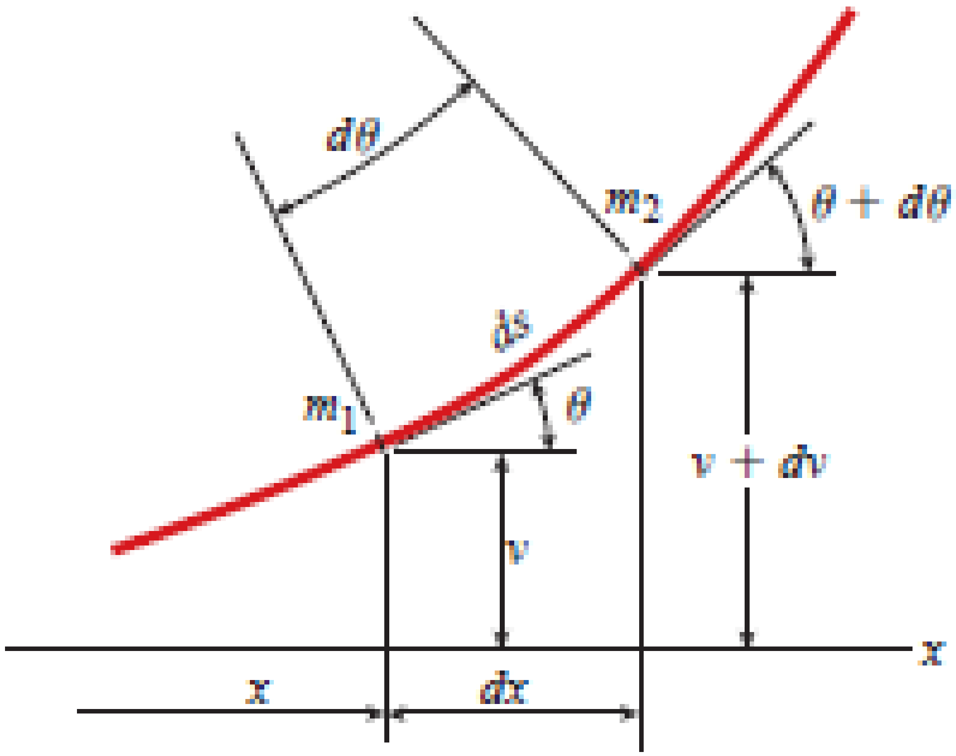
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

Relación momento-curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

Vamos a obtener **la relación entre desplazamientos, giros, y curvatura** para cada punto de la viga.

Deflexiones ("Elástica") de la viga



κ=1/ρ: ***Curvatura***
v: ***desplazamiento perp. al eje***
ϑ: ***ángulo de giro***

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\tan(\theta) = \frac{d\upsilon}{dx}$$

Pequeñas deformaciones: $\theta = \dfrac{d\upsilon}{dx}$

La relación entre desplazamientos, giros, y curvatura para cada punto de la viga:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d(dv/dx)}{dx} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$

Deflexiones ("Elástica") de la viga

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$

Ecuación diferencial de la curva de deflexión (o **ecuación de la elástica**):

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Si conocemos la expresión de M/EI para todo x de la viga, podremos integrar dos veces la ecuación de la elástica, obteniendo una expresión de v con dos constantes de integración (C1 y C2).

En la práctica no haremos la integración analítica, salvo que sea estrictamente necesario.

Se disponen de varios métodos alternativos, de los cuales, en el curso veremos dos en detalle:
- Método de superposición.
- Viga análoga.

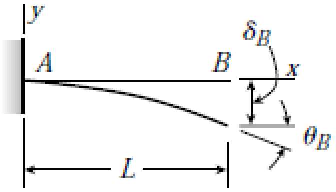
Método de superposición (1º) - Tabulación

Las deflexiones y giros en **vigas empotradas** y **vigas simplemente apoyadas** se encuentran resueltas y tabuladas para una serie habitual de configuraciones de carga. En el EVA, en el apéndice G del libro Gere, o en Internet, se pueden encontrar colecciones completas de casos.

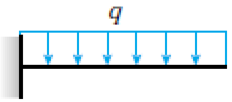
En base a estas tablas, se pueden determinar los desplazamientos **en estos tipos de vigas** para **combinaciones de cargas** mediante el **principio de superposición**.

Ejemplos:

TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS



v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam
$\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam
EI = constant



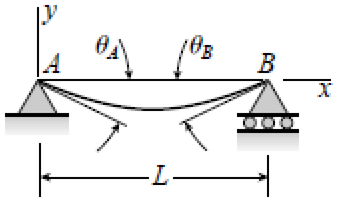
$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

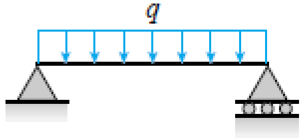
$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

TABLE G-2 DEFLECTIONS AND SLOPES OF SIMPLE BEAMS



EI = constant

v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_C = -v(L/2)$ = deflection at midpoint C of the beam
x_1 = distance from support A to point of maximum deflection
$\delta_{max} = -v_{max}$ = maximum deflection
$\theta_A = -v'(0)$ = angle of rotation at left-hand end of the beam
$\theta_B = v'(L)$ = angle of rotation at right-hand end of the beam



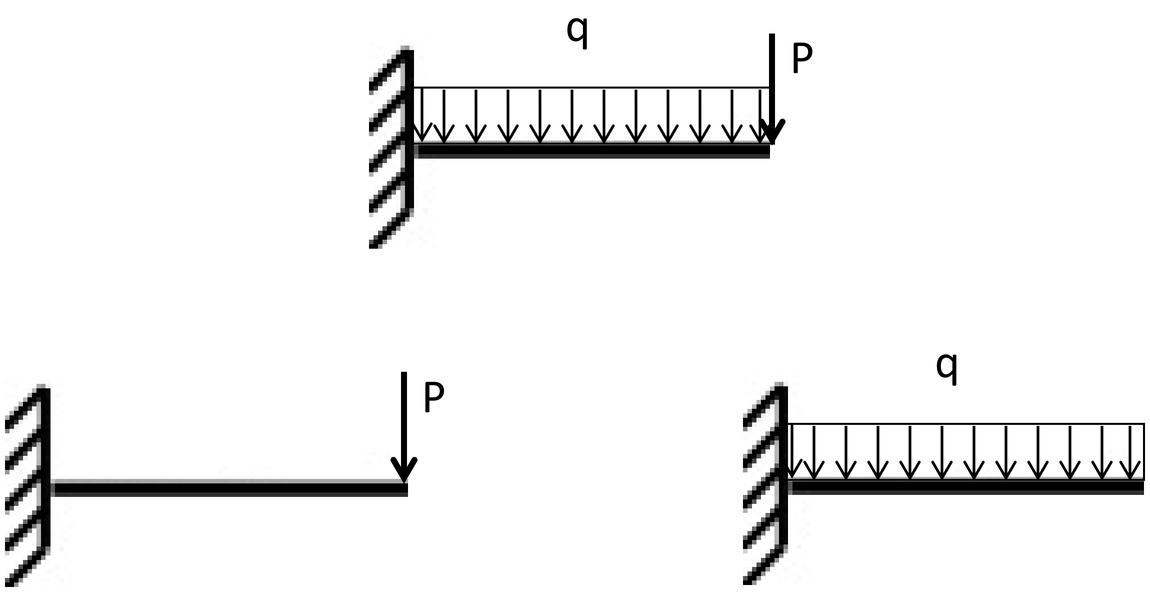
$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

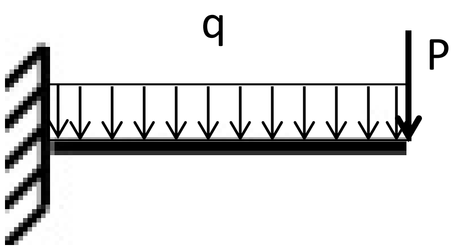
$$\delta_C = \delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

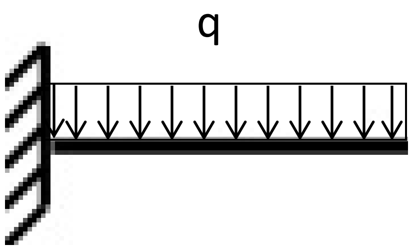
Ejemplo

Hallar el descenso y el giro en el extremo de la ménsula en función de EI.



Superposición





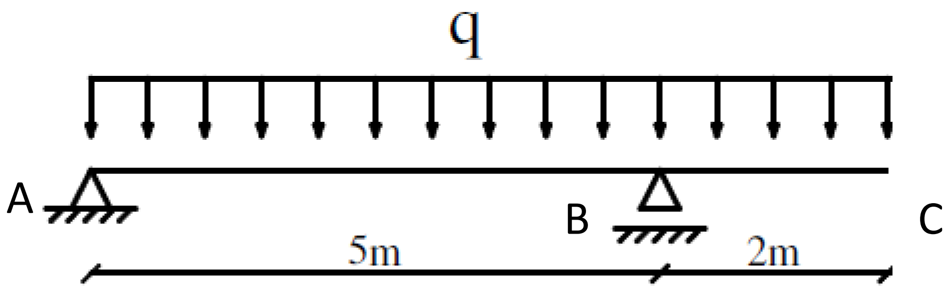
$$\upsilon(L)=\frac{q*L^4}{8EI}\downarrow \qquad \overset{\curvearrowright}{\theta}(L)=\frac{q*L^3}{6EI}$$

$$\upsilon(L)=\frac{P*L^3}{3EI}\downarrow \qquad \overset{\curvearrowright}{\theta}(L)=\frac{P*L^2}{2EI}$$

$$\upsilon(L)=\frac{q*L^4}{8EI}+\frac{P*L^3}{3EI}$$

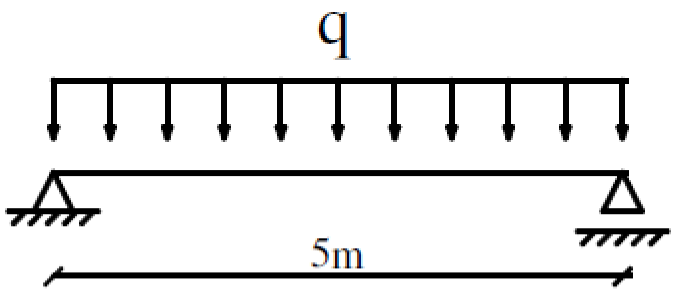
$$\overset{\curvearrowright}{\theta}(L)=\frac{q*L^3}{6EI}+\frac{P*L^2}{2EI}$$

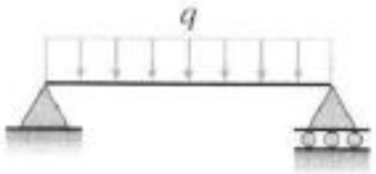
Método de superposición



Giro en A y flecha en C

Giro en A





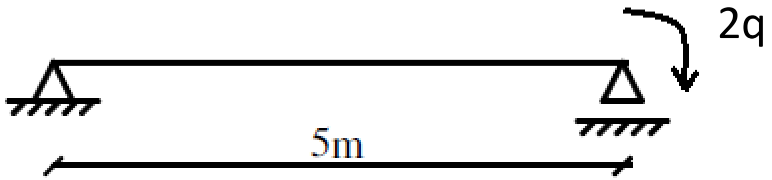
$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

θ_{1A} =q*(5 m)^3/(24EI)

horario



$$v = -\frac{M_0 x}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{M_0}{6LEI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_C = \frac{M_0 L^2}{16EI} \qquad \theta_A = \frac{M_0 L}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$

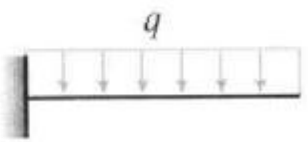
$$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{y} \quad \delta_{máx} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

θ_{2A} =-2 m*q*1 m*5 m/(6EI)   Antihorario

$\theta_{ATOTAL}=\theta_{1A}+\theta_{2A}$

θ_{ATOTAL} = q*(5 m)^3/(24EI -2 m*q*1 m*5 m/(6EI)

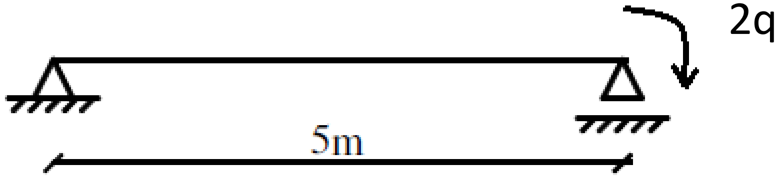
Deflexión en C



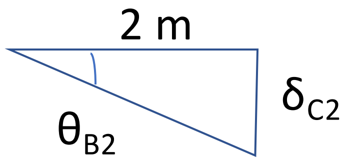
$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

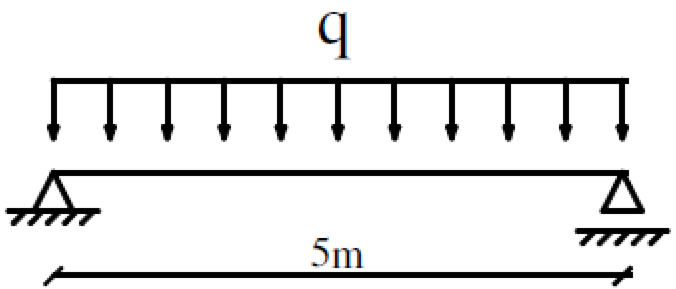
δ_{C1} =q*(5 m)^4/(8EI) ↓

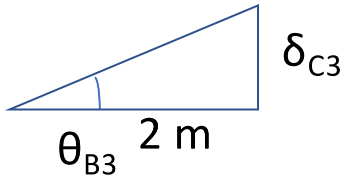


θ_{B2} =-2 m*q*1 m*5 m/(3EI)



δ_{C2} =2*(2 m*q*1 m*5 m/(3EI) ↓





θ_{B3} =q*(5 m)^3/(24EI)

δ_{C3} =-2*(q*(5 m)^3/(24EI)) ↑

$$\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} + \delta_{C3}$$

Método de superposición (1º) - Tabulación

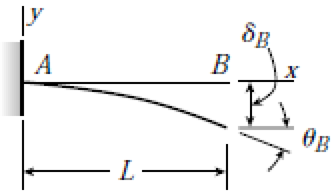
Las deflexiones y giros en **vigas empotradas** y **vigas simplemente apoyadas** se encuentran resueltas y tabuladas para una serie habitual de configuraciones de carga. En el EVA, en el apéndice G del libro Gere, o en Internet, se pueden encontrar colecciones completas de casos.

En base a estas tablas, se pueden determinar los desplazamientos **en estos tipos de vigas** para **combinaciones de cargas** mediante el **principio de superposición**.

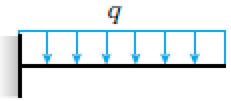
¿Cómo se resuelven otros tipos de vigas?

Ejemplos:

TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS



v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam
$\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam
EI = constant



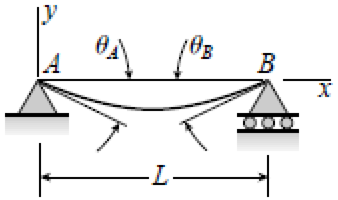
$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

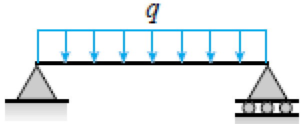
$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

TABLE G-2 DEFLECTIONS AND SLOPES OF SIMPLE BEAMS



EI = constant

v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_C = -v(L/2)$ = deflection at midpoint C of the beam
x_1 = distance from support A to point of maximum deflection
$\delta_{max} = -v_{max}$ = maximum deflection
$\theta_A = -v'(0)$ = angle of rotation at left-hand end of the beam
$\theta_B = v'(L)$ = angle of rotation at right-hand end of the beam

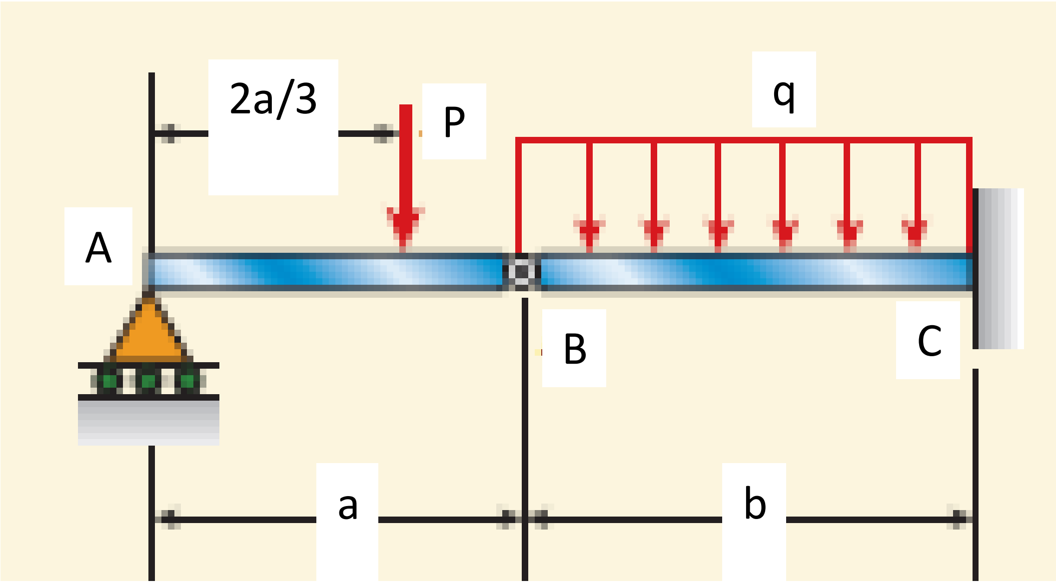


$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

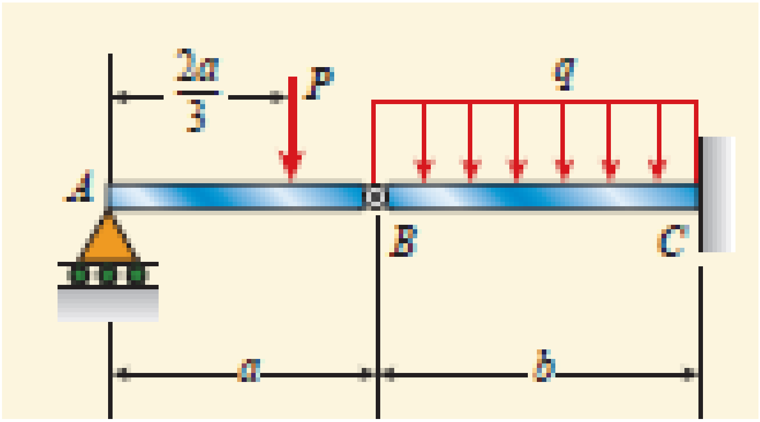
Ejemplo de giros y deflexiones

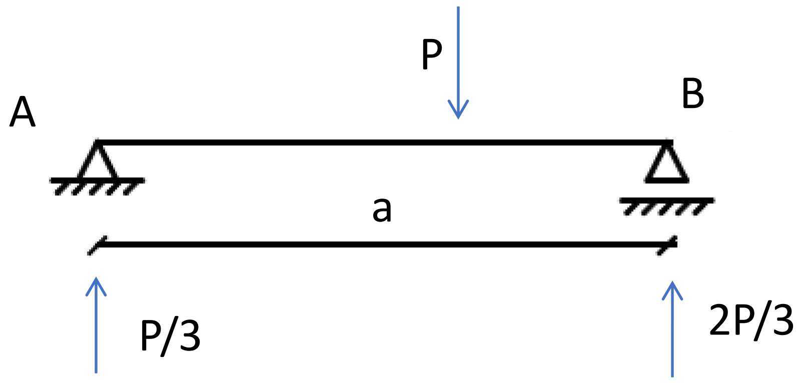


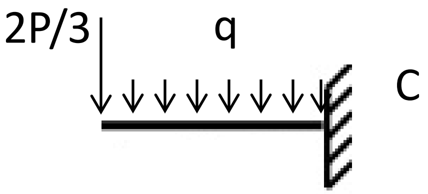
- Deflexión o flecha en B

- Giro en A

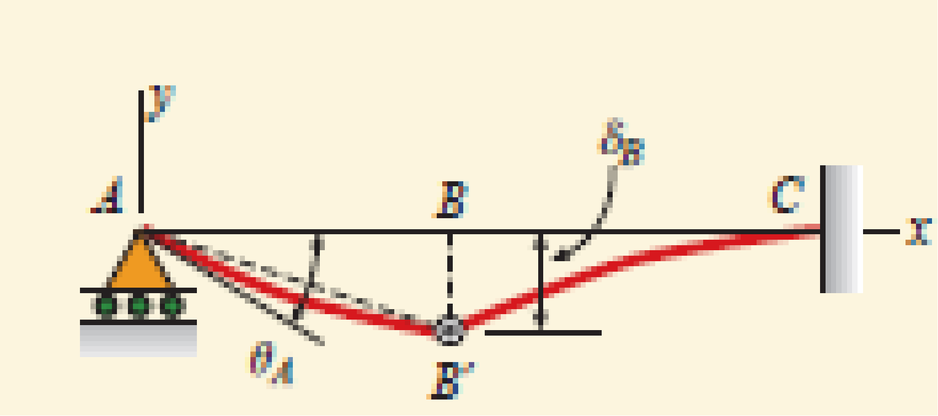
Ejemplo de giros y deflexiones



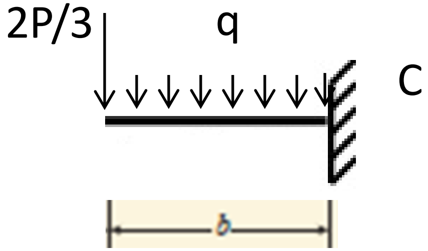




Ejemplo de giros y deflexiones

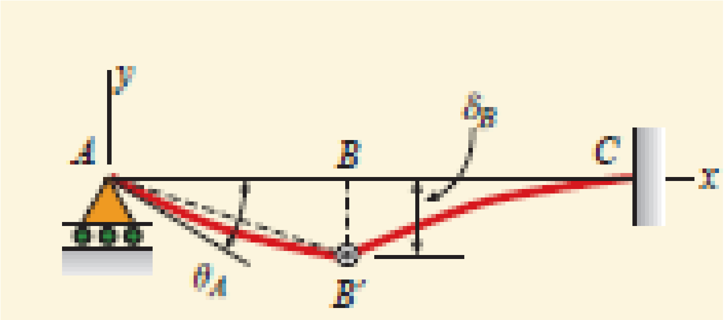


- Flecha en B



$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

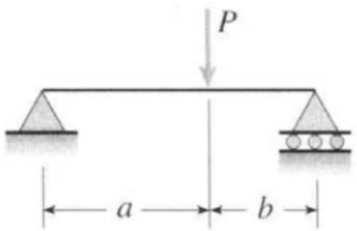
Ejemplo de giros y deflexiones



$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

$$(\theta_A)_1 = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI}$$

$$(\theta_A)_2 = \frac{P\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{a}{3}\right)\left(a + \frac{a}{3}\right)}{6aEI} = \frac{4Pa^2}{81EI}$$



$$\theta_A = \frac{Pab(L + b)}{6LEI}$$

$$\theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI} + \frac{4Pa^2}{81EI}$$

Viga análoga

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{\theta(x)}{EI}$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{-q}{EI} \qquad \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{V(x)}{EI}$$

Viga análoga (Analogía de Mohr)

Teorema Fundamental de Vigas: $-q = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$ $\Longleftrightarrow$ **Ecuación de la elástica**: $\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$

Las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión son análogas a las ecuaciones fundamentales de la viga, en el sentido en que en ambas aparecen tres términos, (**M/EI, θ, v**) y (**q, V, M**) respectivamente, relacionados mediante la primera y segunda derivada.

"**viga análoga**"

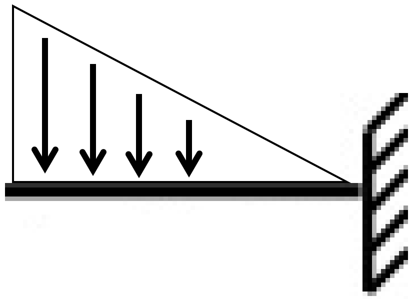
$$\frac{M}{EI} \leftrightarrow -\bar{q} \qquad \theta \leftrightarrow \bar{V} \qquad y \leftrightarrow \bar{M}$$

El método consiste en crear una viga que es cargada con una carga análoga **q**, equivalente a los valores de **M/EI** de nuestra viga real, y con condiciones de borde en **V** y **M**, que reflejen las condiciones de borde de **θ** y **v** de la viga real.

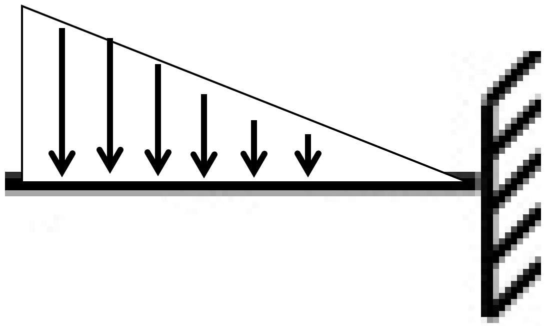
$$\frac{M}{EI} \leftrightarrow -\bar{q} \qquad \theta \leftrightarrow \bar{V} \qquad v \leftrightarrow \bar{M}$$

Viga real		Viga conjugada	
θ $\Delta = 0$	Apoyo fijo	V $M = 0$	Apoyo fijo
θ $\Delta = 0$	Apoyo deslizante	V $M = 0$	Apoyo deslizante
$\theta = 0$ $\Delta = 0$	Empotramiento	$V = 0$ $M = 0$	Libre
θ Δ	Libre	V M	Empotramiento
θ $\Delta = 0$	Apoyo fijo	V $M = 0$	Articulación
θ $\Delta = 0$	Apoyo deslizante	V $M = 0$	Articulación
θ Δ	Articulación	V M	Apoyo deslizante

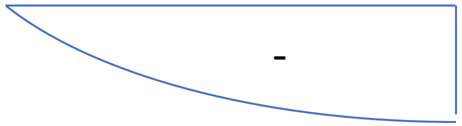
Ejemplo



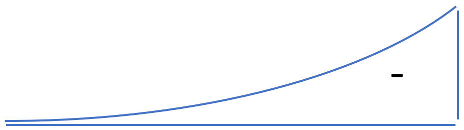
Viga Análoga



$\theta = V^*$



$v = M^*$

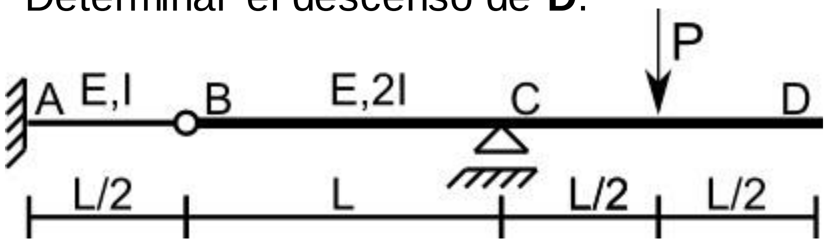


Viga análoga (Analogía de Mohr)

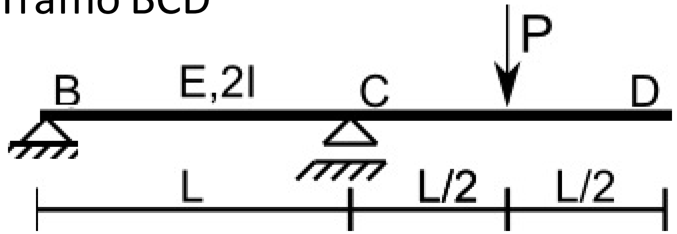
Ejemplo con otras
condiciones de borde.

Determinar el descenso de **D**.

$$\frac{M}{EI} \leftrightarrow -\bar{q}; \quad \theta \leftrightarrow \overline{V}; \quad v \leftrightarrow \overline{M}$$



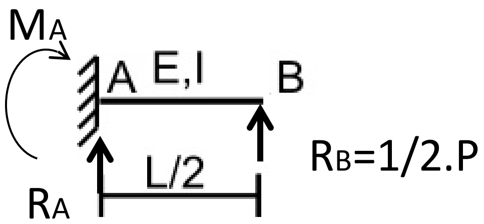
Tramo BCD



Tramo BCD Suma (F)= 0 → $R_B+R_C=P$

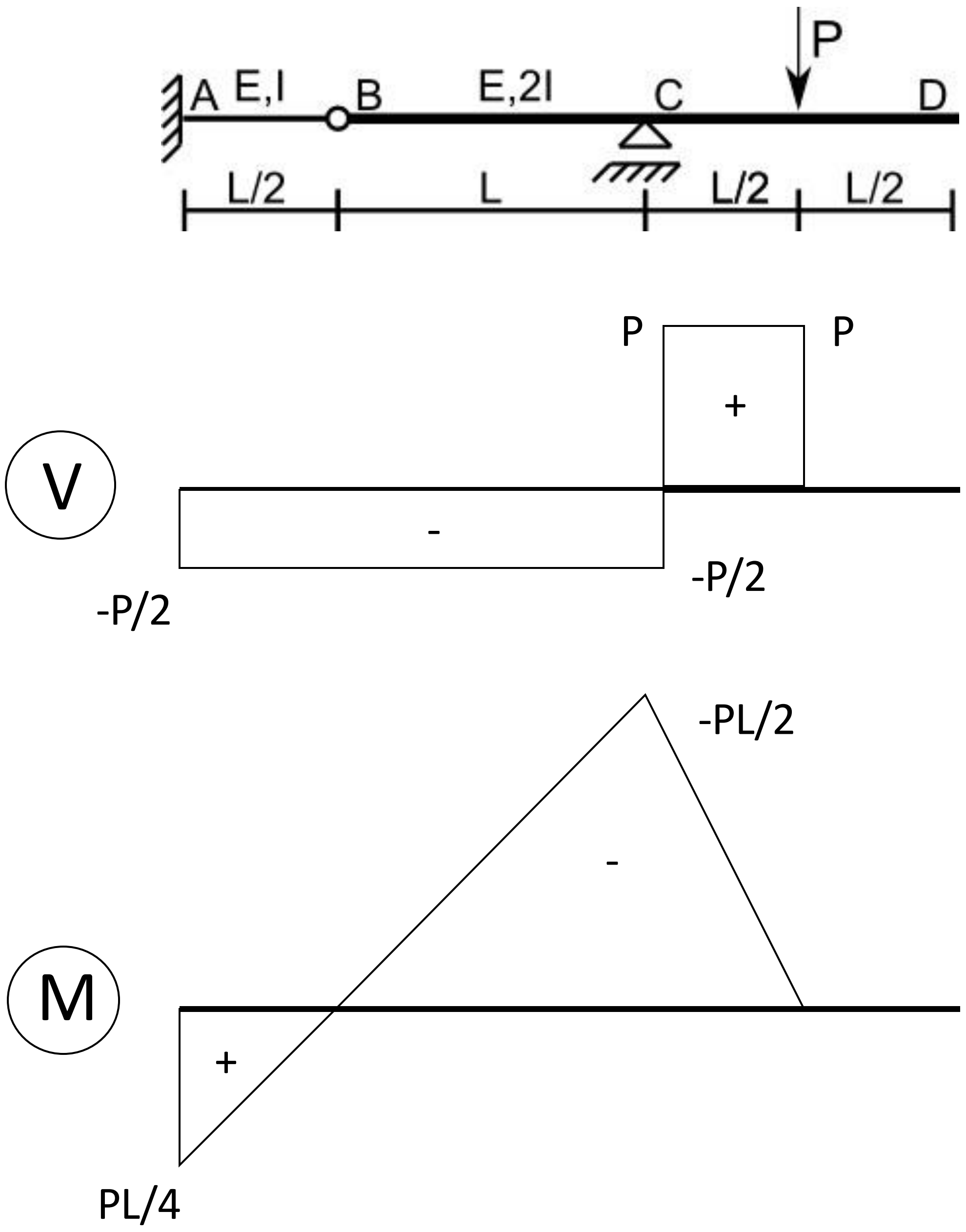
Suma(M_B)=0 → $L.R_C-3/2L.P=0$ → $R_C=3/2.P$ →
$R_B=-1/2.P$

Tramo AB



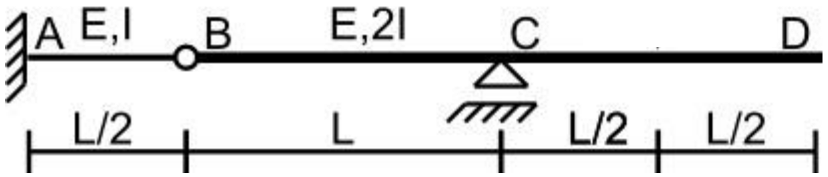
Tramo AB Suma (F)= 0 → $1/2.P+R_A=0$ → $R_A=-1/2.P$

Suma(M_A)=0 → $M_A-L/2.P/2=0$ → $M_A=P*L/4$

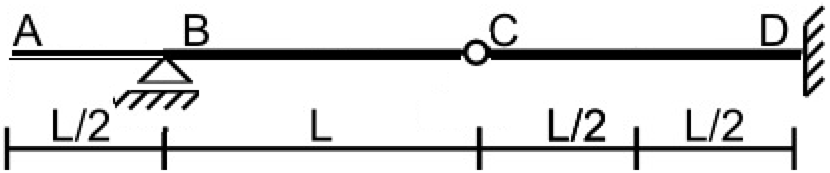

P
A
E,I
B
E,2I
C
D
L/2
L
L/2
L/2
V
P
P
+
-
-P/2
-P/2
M
-PL/2
-
+
PL/4

Viga análoga: vínculos

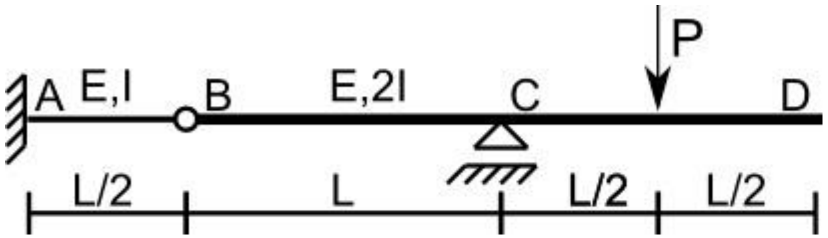
Viga original

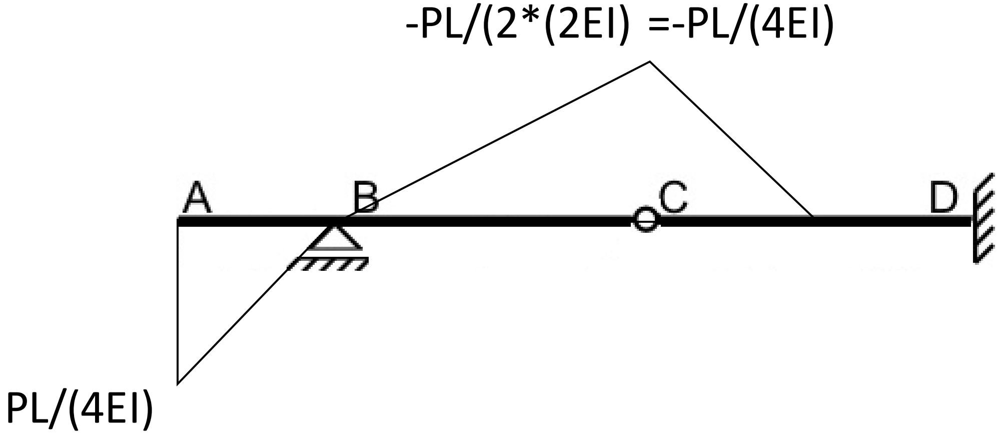


Viga análoga



Carga





$$\frac{M}{EI} \leftrightarrow -\bar{q}; \quad \theta \leftrightarrow \bar{V}; \quad v \leftrightarrow \bar{M}$$