

Teoría de Vigas 2da parte

Esfuerzos máximos por flexión pura

Analizando la fórmula de la flexión, se observa que las tensiones máximas de tracción y compresión ocurren en los puntos más alejados de la fibra neutra (baricentro).

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$

Llamamos y^s e y^i a la distancia desde el eje neutro a los puntos de la sección, superior e inferior respectivamente, más alejados del eje neutro.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$$

Estudiando posteriormente por inspección el signo de la tensión.

En base a estas distancias podemos definir:

$$W^s = \frac{I}{|y^s|} \quad W^i = \frac{I}{|y^i|}$$

W^i y W^s : **Módulos resistentes** de la sección.

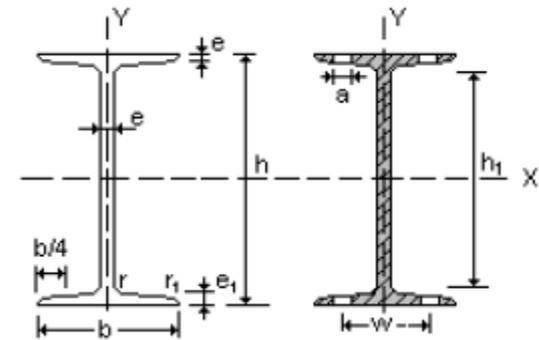
Esta cantidad reúne las propiedades de la sección que intervienen en el cálculo de las tensiones máximas.

Normalmente, aparece sólo un W tabulado, utilizando el $y_{\max} = \max(y^s, y^i)$:

$$W = \frac{I}{|y_{\max}|}$$

Momentos Máximos (positivos y negativos) pueden ocurrir en i) una sección transversal donde se **aplica una carga concentrada** y el cortante cambia de signo, ii) una sección transversal donde el **cortante es 0**, iii) un punto de apoyo donde se tiene una **reacción vertical**, iv) una sección donde hay un **momento puntual aplicado**.

Secciones normalizadas



A = Área de la sección

S_x = Momento estático de media sección, respecto a X.

I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X.

$W_x = 2I_x : h$: Módulo resistente de la sección, respecto a X.

$i_x = (I_x : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a X

I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y.

$W_y = 2I_y : b$. Módulo resistente de la sección, respecto a Y.

$i_y = (I_y : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y

I_t = Módulo de torsión de la sección.

I_a = Módulo de alabeo de la sección.

u = Perímetro de la sección.

a = Diámetro del agujero del roblón normal.

w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros.

h_1 = Altura de la parte plana del alma.

e_2 = Espesor del ala en el eje del agujero.

p = Peso por metro.

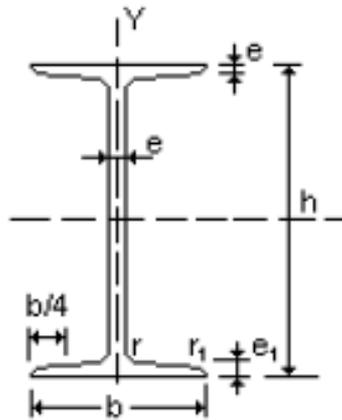
Perfil	Dimensiones							Términos de sección							
	h mm	b mm	e = r mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm
IPN 80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	304	7,58	11,4	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
IPN 100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	370	10,6	19,9	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
IPN 120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	439	14,2	31,8	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
IPN 140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	502	18,3	47,7	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
IPN 160	160	74	6,3	9,5	3,8	125	575	22,8	68,0	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
IPN 180	180	82	6,9	10,4	4,1	142	640	27,9	93,4	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
IPN 200	200	90	7,5	11,3	4,5	159	709	33,5	125	2140	214	8,00	117	26,0	1,87
IPN 220	220	98	8,1	12,2	4,9	175	775	39,6	162	3060	278	8,80	162	33,1	2,02
IPN 240	240	106	8,7	13,1	5,2	192	844	46,1	206	4250	354	9,59	221	41,7	2,20
IPN 260	260	113	9,4	14,1	5,6	208	906	53,4	257	5740	442	10,4	288	51,0	2,32
IPN 280	280	119	10,1	15,2	6,1	225	966	61,1	316	7590	542	11,1	364	61,2	2,45

$$I = \int_A y^2 dA$$

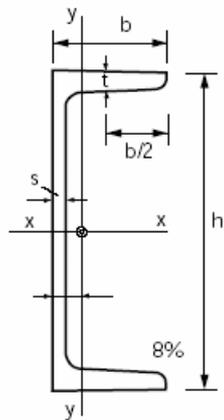
Ejemplo de secciones



Ejemplo de Tablas



Perfil	Dimensiones							Términos de sección							
	h mm	b mm	e = r mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm
IPN 80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	304	7,58	11,4	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
IPN 100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	370	10,6	19,9	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
IPN 120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	439	14,2	31,8	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23



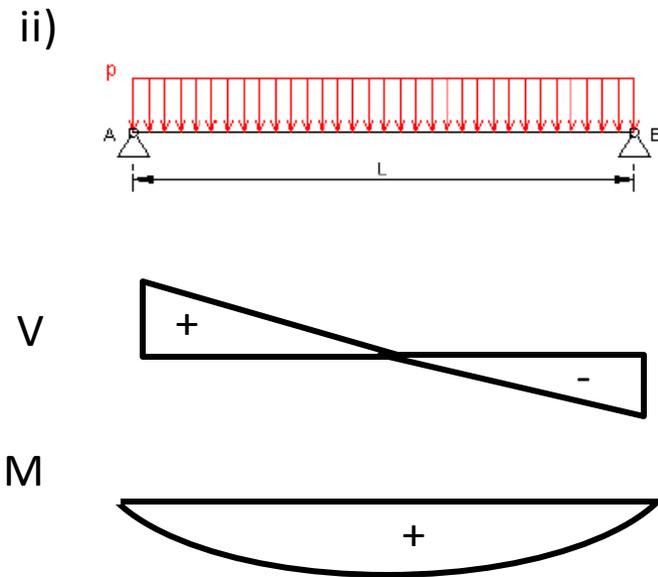
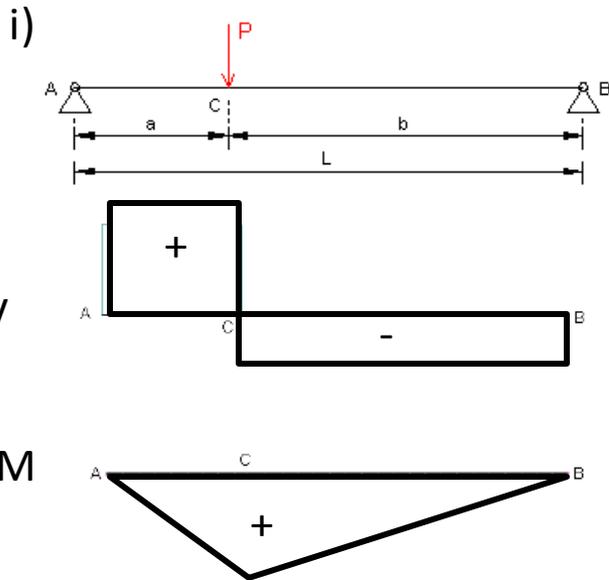
C	h	b ₀	b	d=r	A	g	e _y	I _x	W _x	ρ _x	I _y	W _y	ρ _y	u
3	30	33	5	7	5.44	4.27	1.31	64	4.26	1.09	5.33	268	0.99	159
4	40	35	5	7	6.21	4.87	1.33	141	7.05	1.50	6.68	308	1.04	229
5	50	38	5	7	7.12	5.59	1.37	264	10.60	1.92	9.12	375	1.13	283
6½	65	42	5.5	7.5	9.03	7.09	1.42	575	17.70	2.52	14.10	50.7	1.25	349
8	80	45	6	8	11	8.64	1.45	106	26.50	3.10	19.40	6.36	1.33	4.17
10	100	50	6	8.5	13.50	10.60	1.55	206	41.20	3.91	29.30	8.49	1.47	4.97

Esfuerzos máximos por flexión pura

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$$

Estudiando posteriormente por inspección el signo de la tensión.

Momentos Máximos (positivos y negativos) pueden ocurrir en i) una sección transversal donde se **aplica una carga concentrada** y el cortante cambia de signo, ii) una sección transversal donde el **cortante es 0**, iii) un punto de apoyo donde se tiene una **reacción vertical**, iv) una sección donde hay un **momento puntual aplicado**.



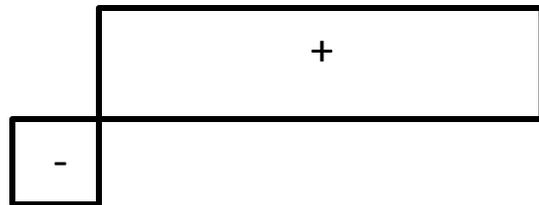
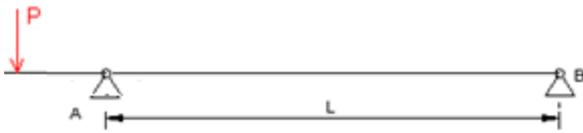
Esfuerzos máximos por flexión pura

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$$

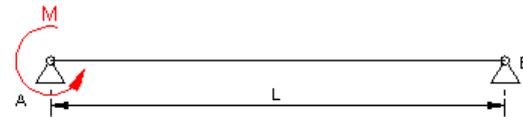
Estudiando posteriormente por inspección el signo de la tensión.

Momentos Máximos (positivos y negativos) pueden ocurrir en i) una sección transversal donde se **aplica una carga concentrada** y el cortante cambia de signo, ii) una sección transversal donde el **cortante es 0**, iii) un punto de apoyo donde se tiene una **reacción vertical**, iv) una sección donde hay un **momento puntual aplicado**.

iii)



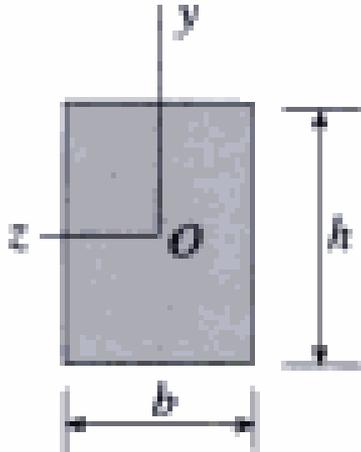
iv)



M

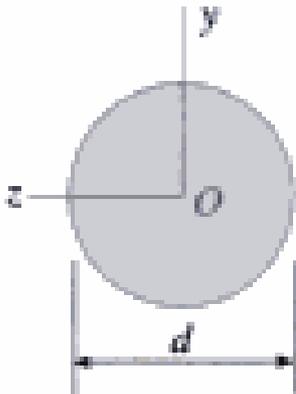


Secciones



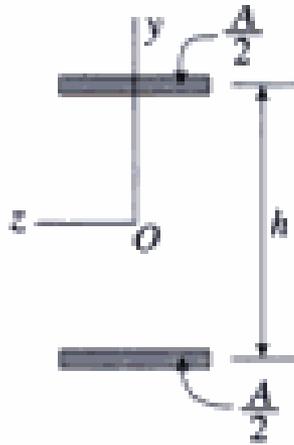
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3}{12(h/2)} = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}$$



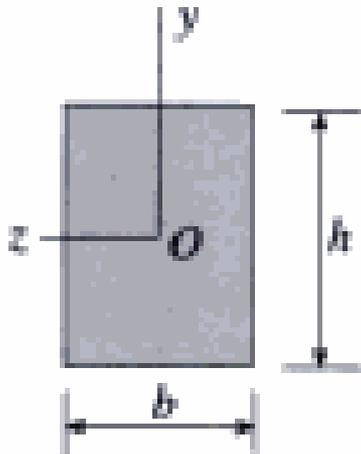
$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W = \frac{I}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{Ad}{8}$$



$$I = 2 \cdot \left(A/2 \cdot \frac{h^2}{4} + I_{zG} \right)$$

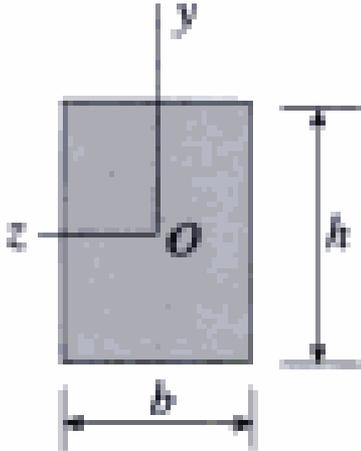
$$W = \left(A \cdot \frac{h^2}{4} + I_z \right) 2/h = \frac{Ah}{2} + 2I_{zG}/h$$



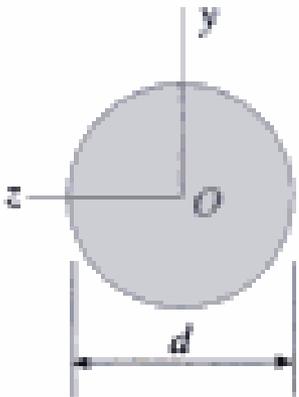
$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3}{12(h/2)} = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}$$

Si el área de un cuadrado y un círculo son iguales
Llegamos a que

$$h = \sqrt{\pi} \cdot d / 2$$



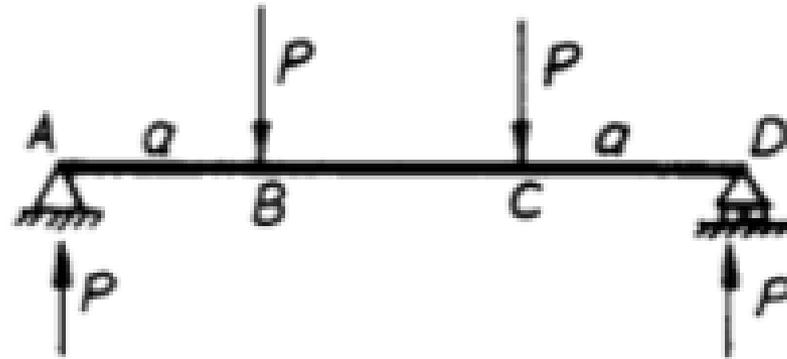
$$W = \left(\frac{h^3}{6} \right) = \frac{\pi \sqrt{\pi} d^3}{48} = 0.116d^3$$



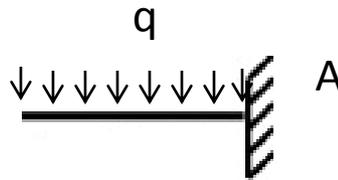
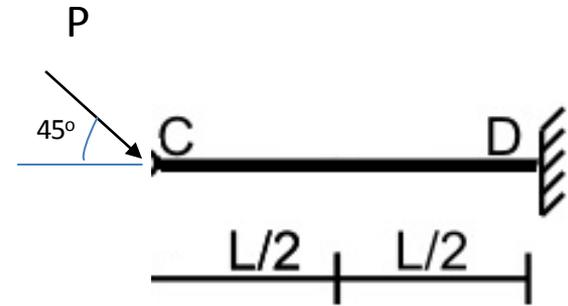
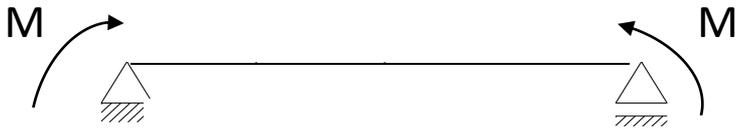
$$W = \frac{\pi d^3}{32} = 0.0982d^3$$

$$\frac{W_{\text{cuadrado}}}{W_{\text{circulo}}} = \frac{0.116d^3}{0.0982d^3} = 1.18$$

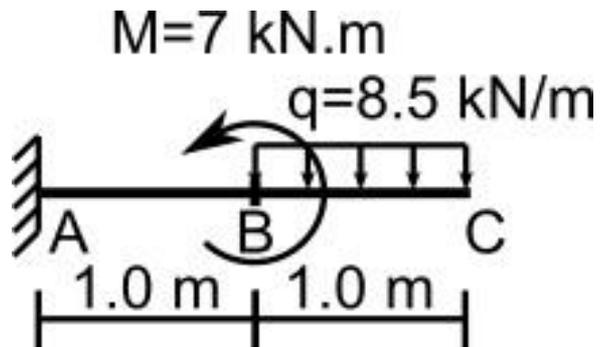
Ejemplo



Ejemplos

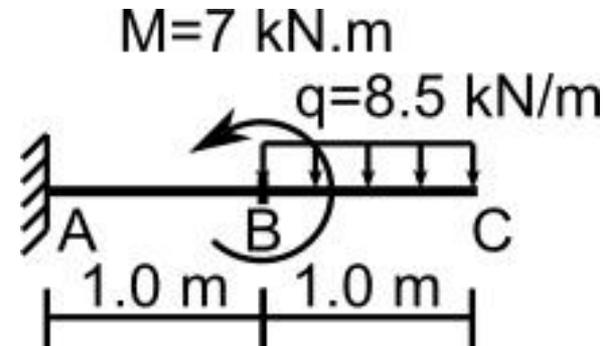
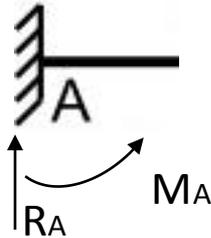


Ejemplo



- Reacciones
- V y M en el punto B.
- Trazar diagrama de V y M
- Dimensionar con perfil normalizado

Reacciones



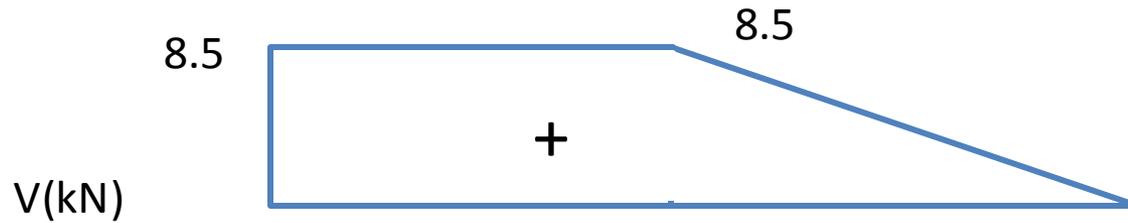
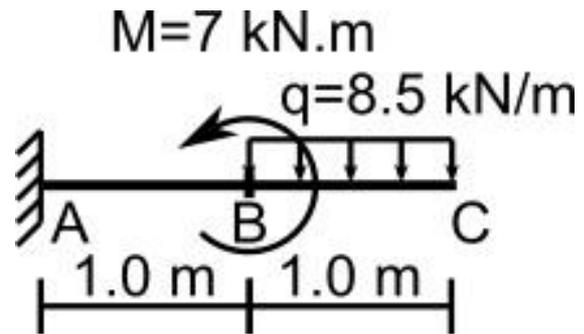
$$\text{Suma } (F_v=0) \rightarrow R_A = 8.5 \cdot 1 \text{ m} = R_A = 8.5 \text{ kN.m}$$

$$\text{Suma } (M_A=0)$$

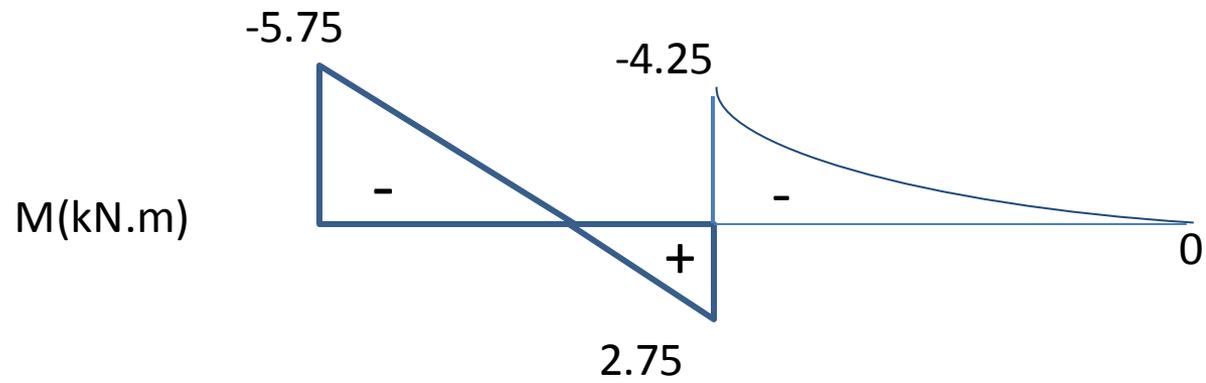
$$M_A + 7 \text{ kN.m} - 8.5 \cdot 1 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 0$$

$$M_A = 1.5 \cdot 8.5 - 7 = 5.75 \text{ kN}$$

Diagramas



Momento



Dimensionado con Perfil IPN

Mmax= 5.75 kN.m

$\sigma_{adm}=140$ MPa

$$W_{\geq} 5.75 * 10^3 / (140 * 10^6)$$

$$W_{\geq} 4.1 * 10^{-5} \text{ m}^3$$

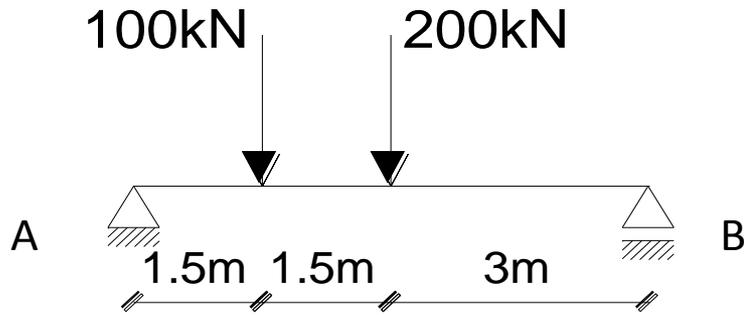
$$W_{\geq} 4.1 * 10^{-5} * 10^6 \text{ cm}^3$$

$$W_{\geq} 41 \text{ cm}^3$$

→ IPN 120

Perfil	Dimensiones							Términos de sección							
	h mm	b mm	e = r mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm
IPN 80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	304	7,58	11,4	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
IPN 100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	370	10,6	19,9	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
IPN 120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	439	14,2	31,8	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23

Ejemplo



a) trazar los diagrama de cortante y momento flector y bosquejar cualitativamente la deformada

b) dimensionar con una sección cuadrada, sabiendo que la tensión normal admisible es $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$. Trazar el diagrama de tensiones normales en la sección que dimensiona.

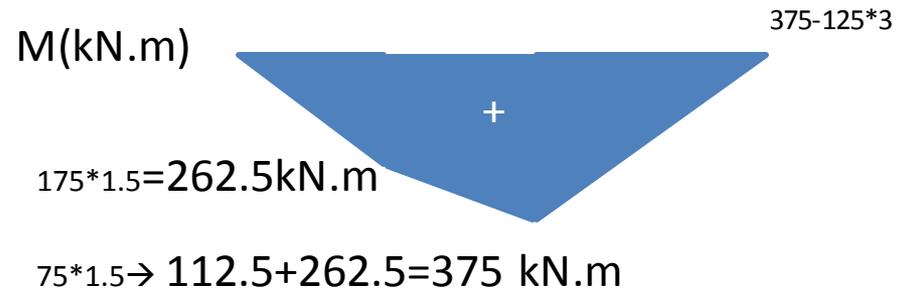
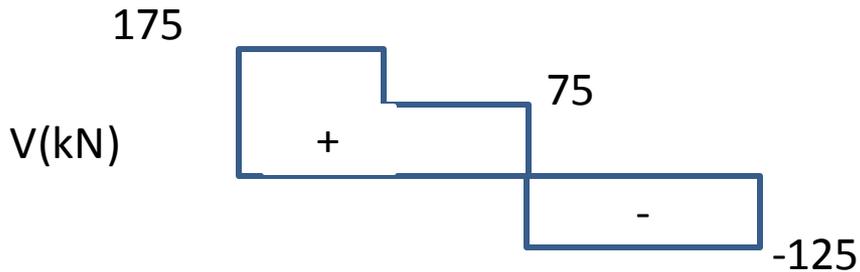
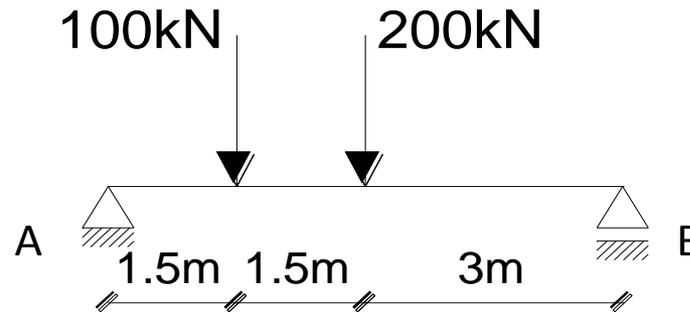
Equilibrio y Diagramas

$$\text{Suma (Fv=0)} \rightarrow R_A + R_B = 300$$

$$\text{Suma (M_A=0)} \rightarrow 1.5 \cdot 100 + 3 \cdot 200 - 6 \cdot R_B = 0$$

$$R_B = 750/6 = 125 \text{ kN}$$

$$R_A = 175 \text{ kN}$$



Dimensionado

- $M_{max} = 375 \text{ kN.m}$
- $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$

$$\sigma_{adm} \geq M_{max} / W_x$$

$$I_{\text{cuadrado}} = a^4 / 12$$

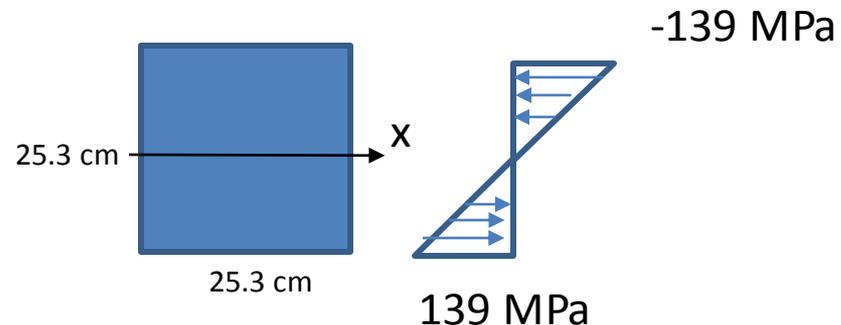
$$W_{\text{cuadrado}} = a^3 / 6$$

$$a^3 / 6 \geq M_{max} / \sigma_{adm} \rightarrow a^3 \geq 6 (375 * 10^3 / 140 * 10^6)$$

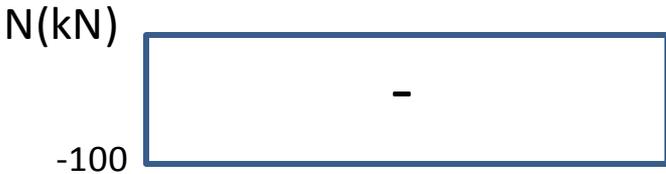
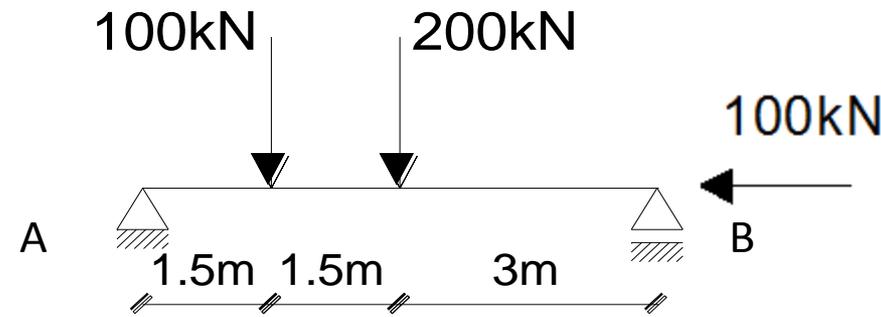
$$a^3 \geq 0.0161 \text{ m} \rightarrow a \geq 25.3 \text{ cm}$$

$$\sigma = 375 * 10^3 / (0.253^3 / 6)$$

$$\sigma = 139 \text{ MPa}$$



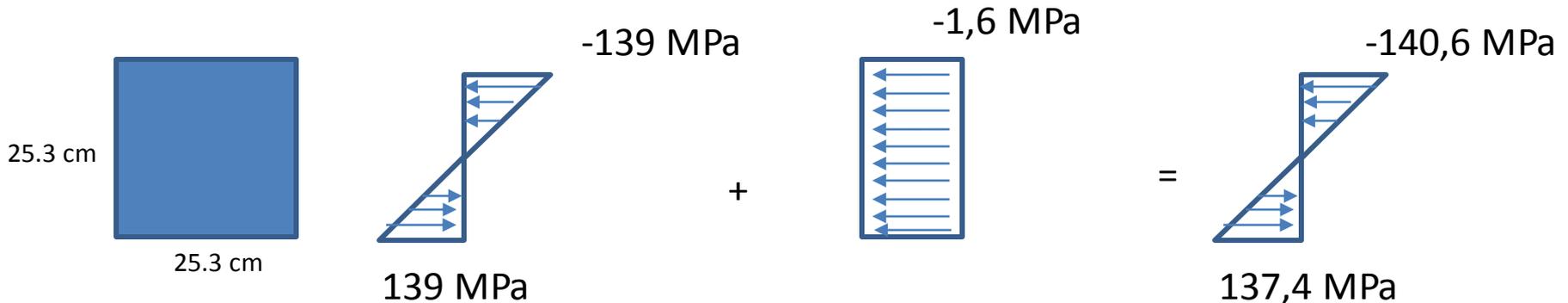
Ejemplo



a) trazar los diagrama de cortante y momento flector y bosquejar cualitativamente la deformada

b) dimensionar con una sección cuadrada, sabiendo que la tensión normal admisible es $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$. Trazar el diagrama de tensiones normales en la sección que dimensiona.

$$\sigma_{adm} \geq M_{max}/W + F/A$$



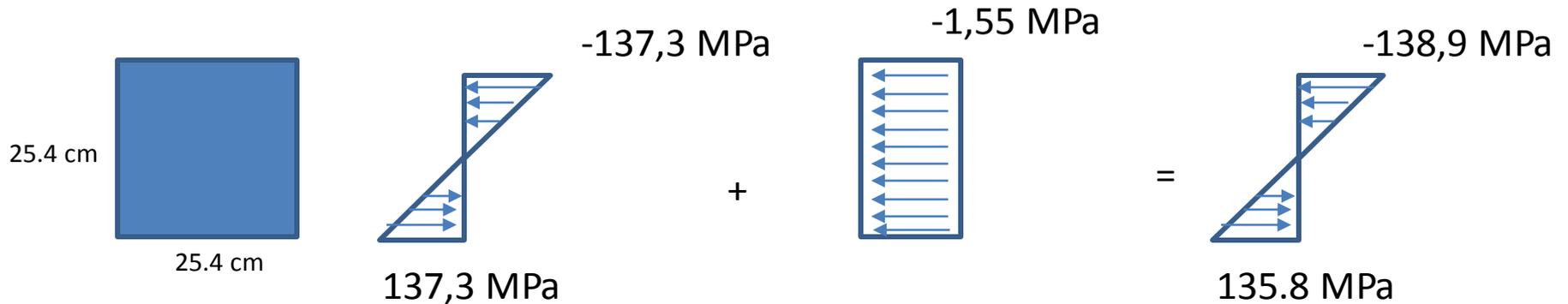
Dimensionado

$$140 \text{ MPa} \geq 375 \text{ kN.m} / (a^3/6) + 100 \text{ kN}/a^2$$

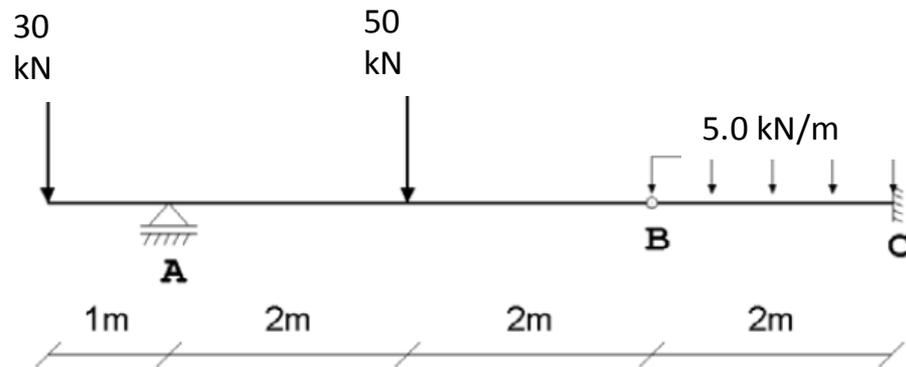
Podemos resolver la Ec. De 3er grado, o de lo contrario tanteamos

$$375 \text{ kN.m} / (a^3/6) + 100 \text{ kN}/a^2$$

$$a = 25.4 \text{ cm} \rightarrow 137.3 \text{ MPa} + 1.55 \text{ MPa}$$



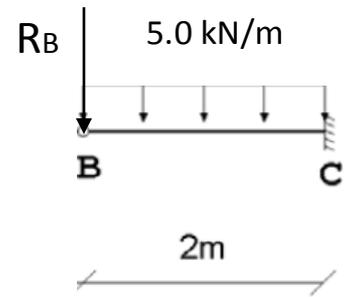
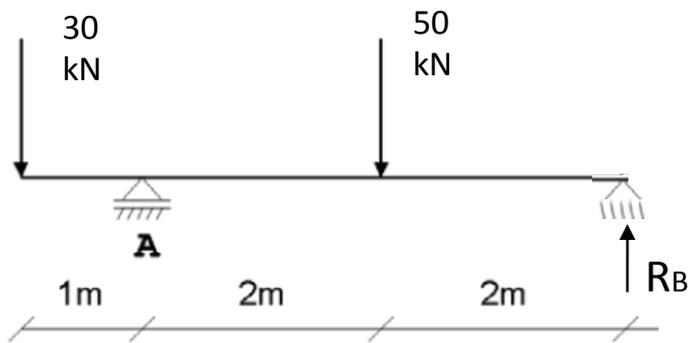
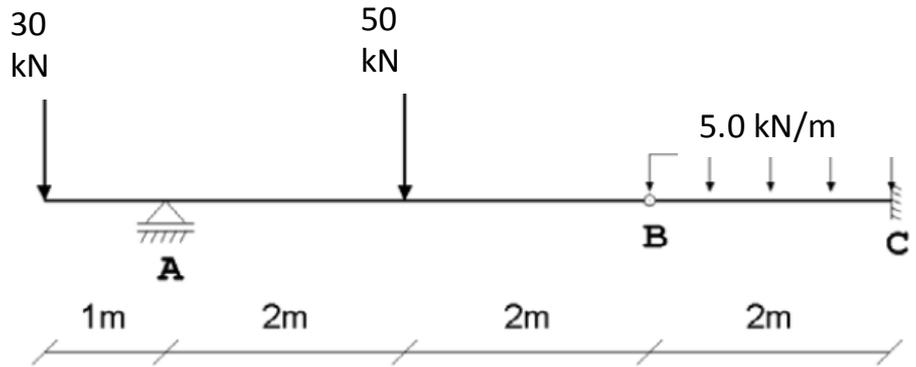
Ejemplo

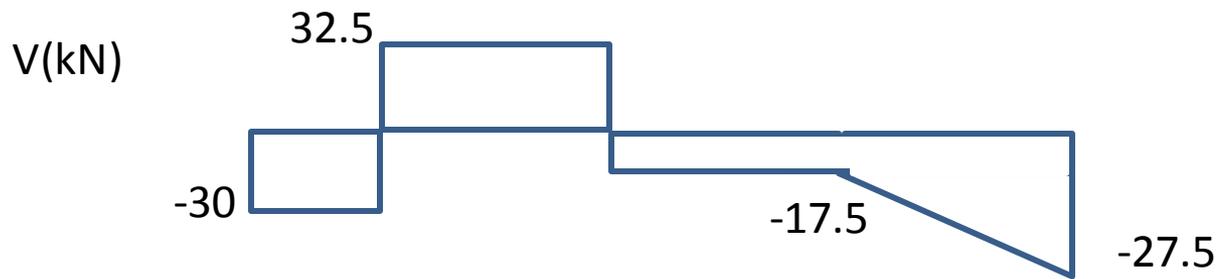
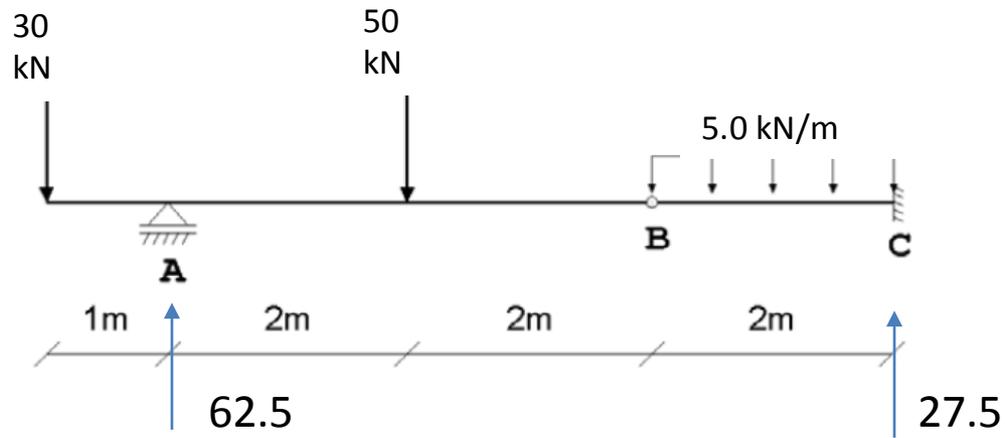


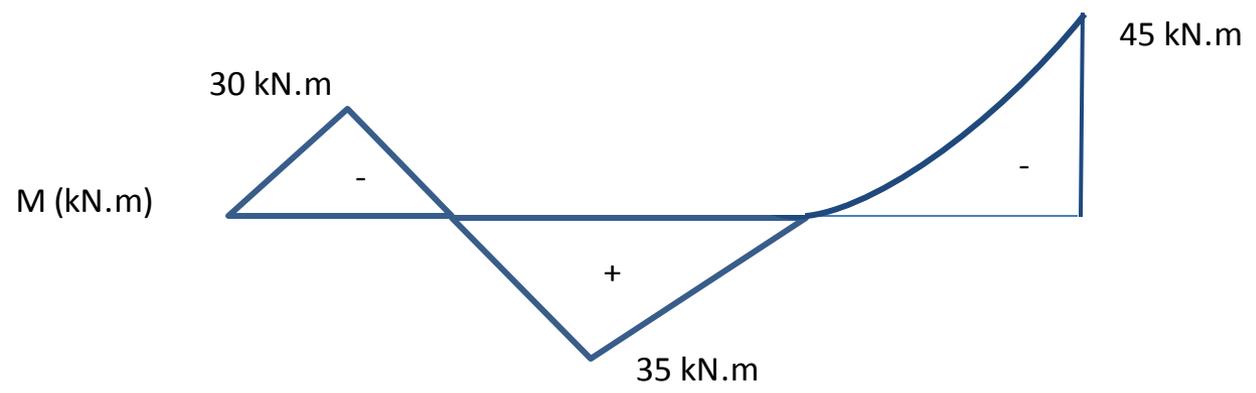
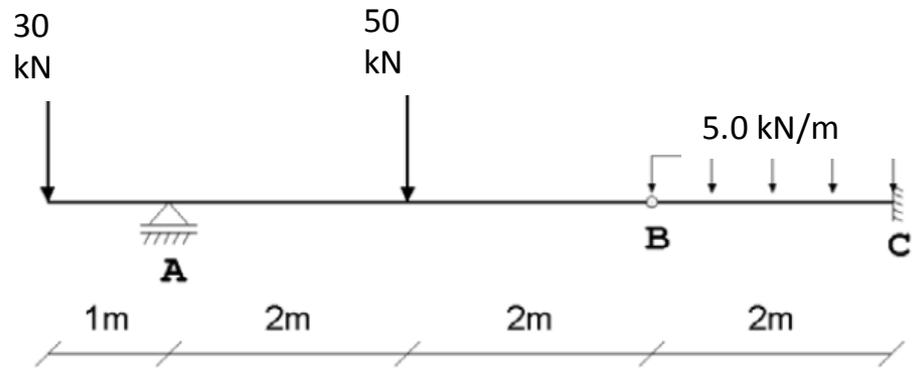
Verificar si las tensiones por flexión de la viga cumplen con los valores admisibles para el material:

σ_{adm} tracción = 8 MPa

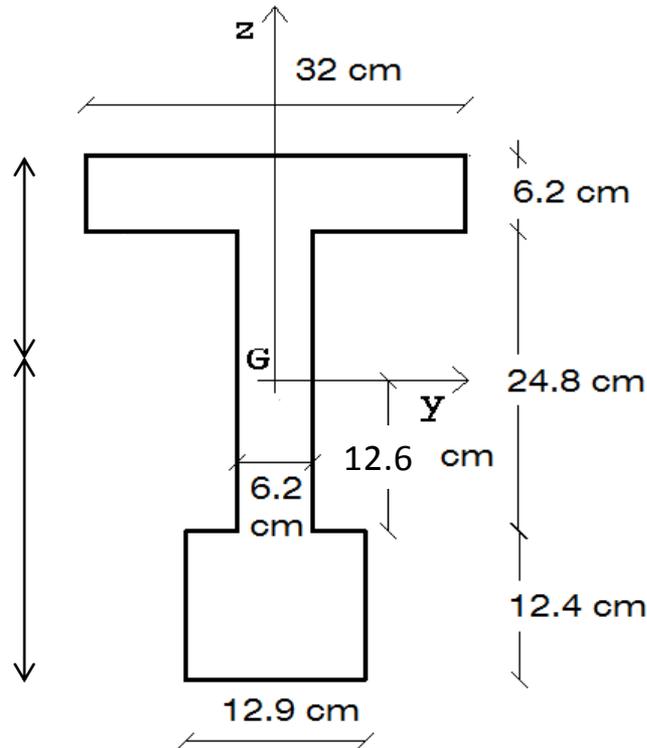
σ_{adm} compresión = 10 MPa







Sección

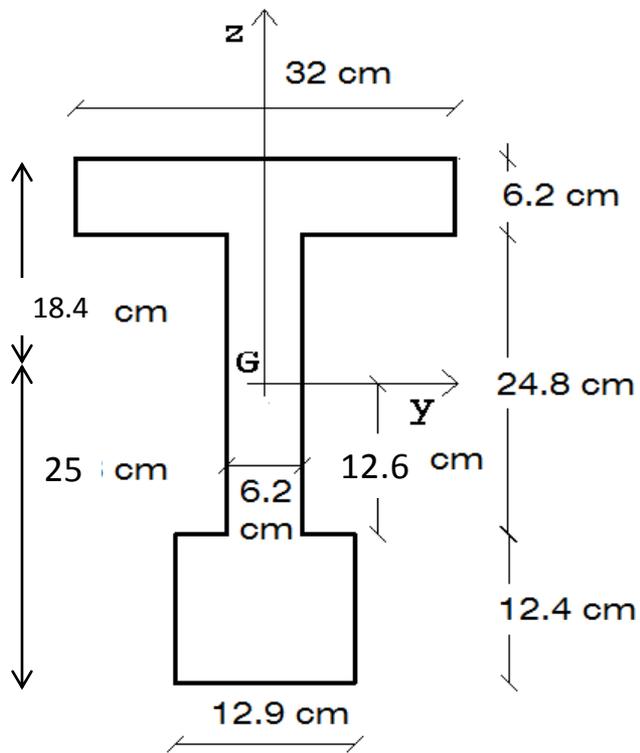


$$R^*y_G = 12.9 \cdot 12.4 \cdot (12.4/2) + 24.8 \cdot 6.2 \cdot (12.4 + 12.4) + 32 \cdot 6.2 \cdot (12.4 + 24.8 + 3.1)$$

$$y_G = (12.9 \cdot 12.4 \cdot (12.4/2) + 24.8 \cdot 6.2 \cdot (12.4 + 12.4) + 32 \cdot 6.2 \cdot (12.4 + 24.8 + 3.1)) / (12.9 \cdot 12.4 + 24.8 \cdot 6.2 + 6.2 \cdot 32)$$

$$y_G = 25 \text{ cm}$$

Sección



$$I_y = 113551.7 \text{ cm}^4$$

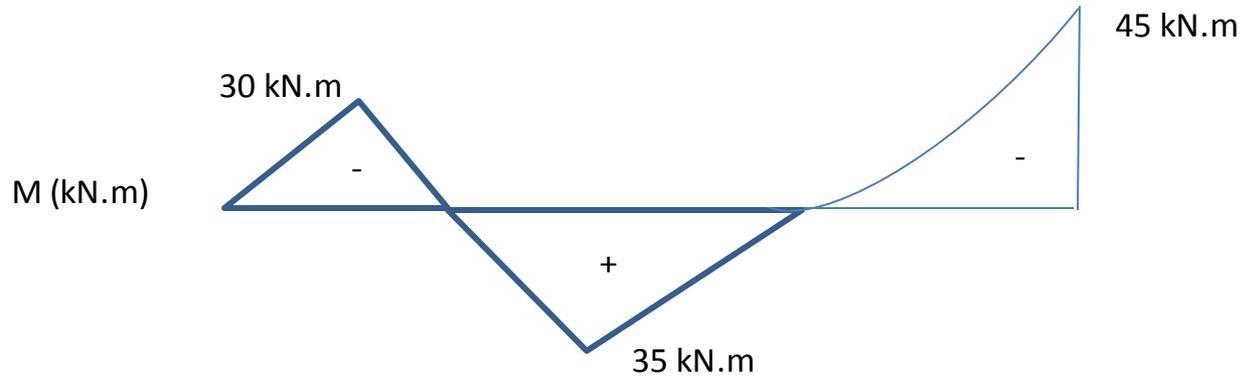
$$I_y = 12.9 \cdot 12.4^3 / 12 + (12.4 / + 12.6)^2 \cdot 12.9 \cdot 12.4 + 6.2 \cdot 24.8^3 / 12 + 6.2 \cdot 24.8 \cdot 0.2^2 + 32 \cdot 6.2^3 / 12 + 32 \cdot 6.2 \cdot (18.4 - 3.1)^2$$

$$W_{\text{sup}} = 113551.7 \text{ cm}^4 / 18.4 \text{ cm}$$

$$W_{\text{sup}} = 6171 \text{ cm}^3$$

$$W_{\text{inf}} = 113551.7 \text{ cm}^4 / 25 \text{ cm}$$

$$W_{\text{inf}} = 4542.1 \text{ cm}^3$$



$$\sigma_{\text{adm tracción}} = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{adm compresión}} = 10 \text{ MPa}$$

$$M^+ = 35 \text{ kN.m}$$

$$M^- = 45 \text{ kN.m}$$

$$W_{\text{sup}} = 6171.3 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{\text{tracción}} = 35/W_{\text{inf}}$$

$$\sigma_{\text{compresión}} = 45/W_{\text{inf}}$$

$$W_{\text{inf}} = 4542.1 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{\text{compresión}} = 35/W_{\text{sup}}$$

$$\sigma_{\text{tracción}} = 45/W_{\text{sup}}$$

Tensiones

$$M^+ = 35 \text{ kN.m}$$

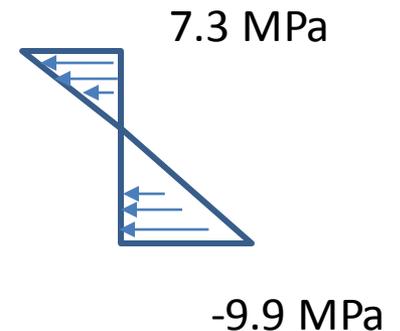
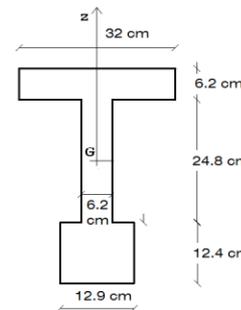
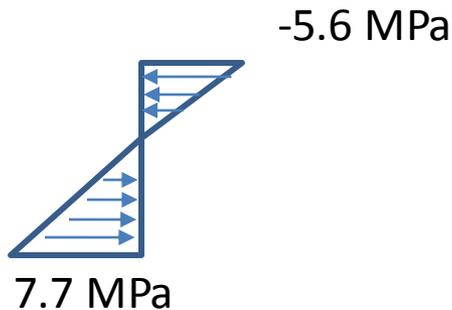
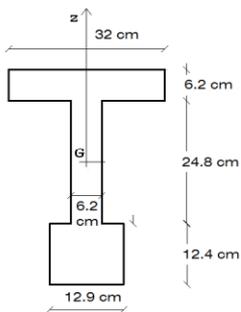
$$\sigma_{\text{tracción}} = 35/W_{\text{inf}} = 7.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{compresión}} = 35/W_{\text{sup}} = 5.6 \text{ MPa}$$

$$M^- = 45 \text{ kN.m}$$

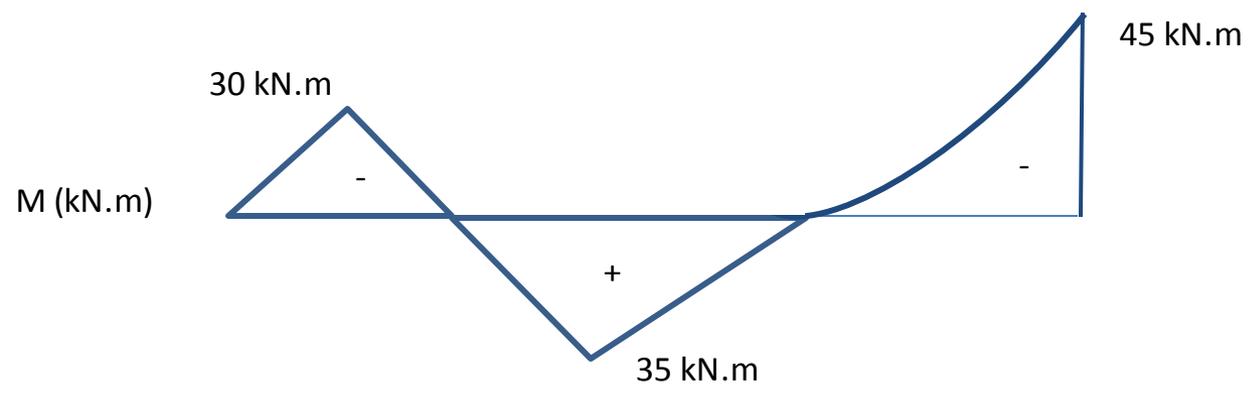
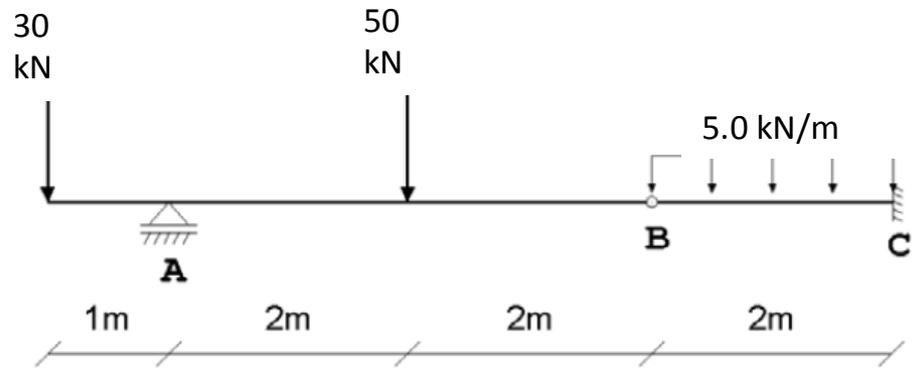
$$\sigma_{\text{compresión}} = 45/W_{\text{inf}} = 9.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{tracción}} = 45/W_{\text{sup}} = 7.3 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{\text{adm tracción}} = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{adm compresión}} = 10 \text{ MPa}$$



Ejemplo Ex. Julio 2005

Para la viga de la figura, se pide:

- Hallar reacciones.
- Trazar diagrama de solicitaciones.
- Dimensionar la viga con un perfil **PNI** considerando $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$.

