SECCIONES COMPUESTAS

1. Secciones compuestas por distintos materiales

Hay casos en la práctica en los que se emplean vigas formadas por dos o más materiales diferentes. Un ejemplo de esto puede ser el de una viga de madera reforzada en sus caras superior e inferior con planchuelas de acero, o el de un entrepiso compuesto por una losa de hormigón y perfiles de acero, en el cual cierto ancho de la losa de hormigón colabora junto con cada perfil, trabajando el conjunto como una viga compuesta.

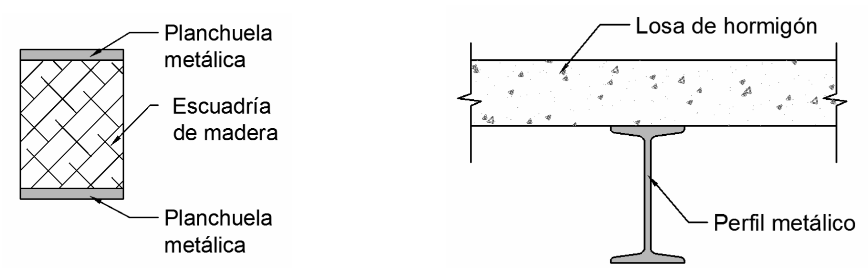

Figura 1: Ejemplos usuales de vigas con secciones compuestas

Estudiaremos la distribución de tensiones en secciones compuestas para el caso de piezas en que el plano de flexión es un plano de simetría de la sección.

Trabajaremos bajo la hipótesis de que las secciones planas se mantienen planas y perpendiculares al eje de la viga luego de la flexión (hipótesis de Navier), con lo cual las deformaciones unitarias serán proporcionales a las distancias a la línea neutra.

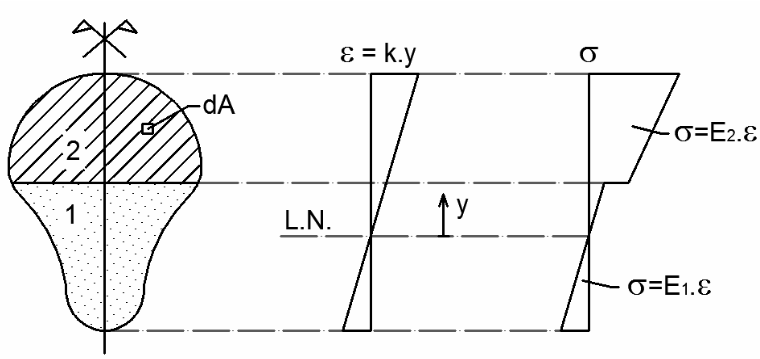

Figura 2: Sección compuesta y sus diagramas de deformaciones y tensiones

Sea una sección genérica como la que muestra la figura 2, compuesta por un material 1 de módulo de elasticidad E_1 y un material 2 de módulo de elasticidad E_2; supondremos $E_1 < E_2$. Las deformaciones unitarias producidas en la misma se pueden expresar, en función de la distancia de cada fibra a la línea neutra, como:

$$\varepsilon = ky$$

Luego, admitiendo que los materiales 1 y 2 cumplen con la ley de Hooke, tenemos que las tensiones en cada material serán:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon = E_1 ky$$
$$\sigma_2 = E_2\varepsilon = E_2 ky$$

Para determinar la ubicación de la línea neutra y la constante *k*, igualamos los esfuerzos internos a los externos en la sección:

$$N = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = \int_{A_1} E_1 ky dA + \int_{A_2} E_2 ky dA = kE_1 \left[\int_{A_1} y dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y dA \right]$$
$$M = \int_{A_1} \sigma_1 . y dA + \int_{A_2} \sigma_2 . y dA = \int_{A_1} E_1 ky . y dA + \int_{A_2} E_2 ky . y dA = kE_1 \left[\int_{A_1} y^2 dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y^2 dA \right]$$

Definiendo $\frac{E_2}{E_1} = n$, relación entre los módulos de elasticidad de los materiales que componen la sección, podemos escribir las ecuaciones de equilibrio anteriores como:

$$N = kE_1 \left[\int_{A_1} y dA + n \int_{A_2} y dA \right]$$
$$M = kE_1 \left[\int_{A_1} y^2 dA + n \int_{A_2} y^2 dA \right]$$

Podemos entonces trabajar con una sección equivalente homogénea de material 1, de área A_2' en lugar de A_2, de forma que:

$$n \int_{A_2} y dA = \int_{A_2'} y dA$$
$$n \int_{A_2} y^2 dA = \int_{A_2'} y^2 dA$$

Esta sección la podemos diseñar multiplicando el ancho de la zona 2 por n. De esta forma el problema original con dos materiales puede ser sustituido por un problema equivalente tomando una sección de módulo de elasticidad constante (en este caso E_1) y área igual a $A_1 + A_2$', como se indica en la figura 3, problema que es más sencillo y que sabemos resolver.

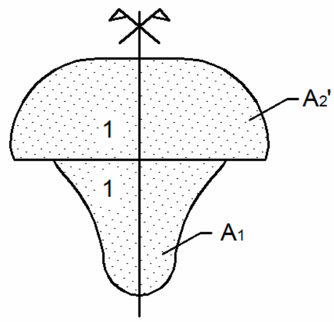

Figura 3: Sección homogeneizada al material 1.

2. Sección homogénea equivalente

De acuerdo a lo anterior el problema puede ser resuelto considerando la sección homogénea equivalente. Es conveniente para la resolución pasar a considerar como origen de coordenadas el baricentro (G) de la sección homogénea equivalente refiriendo los momentos flectores a estos ejes.
En este caso tendremos que:

$$\varepsilon = \varepsilon_G + ky$$

Y que:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon = E_1 ky + E_1\varepsilon_G$$
$$\sigma_2 = E_2\varepsilon = E_2 ky + E_2\varepsilon_G$$

En consecuencia:

$$N = \int_{A1} \sigma_1 dA + \int_{A2} \sigma_2 dA = \int_{A1} E_1(ky + \varepsilon_G)dA + \int_{A2} E_2(ky + \varepsilon_G)dA =$$
$$= kE_1\left[\int_{A1} ydA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} ydA\right] + \varepsilon_G E_1\left[\int_{A1} dA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} dA\right]$$

El primer término entre paréntesis rectos corresponde al momento de primer orden de la sección homogénea equivalente en relación a un eje que pasa por el baricentro, o sea que es nulo.
El segundo término entre paréntesis rectos corresponde al área de la sección homogénea equivalente. La expresión anterior queda entonces:

$$N = \varepsilon_G E_1 A_h$$

Se observa aquí que cuando la directa es nula en la sección ($N = 0$), se tiene que $\varepsilon_G = 0$, y por lo tanto la línea neutra pasa por el baricentro de la sección homogénea.

El momento queda:

$$M = \int_{A1} \sigma_1 . ydA + \int_{A2} \sigma_2 . ydA = \int_{A1} E_1 (ky + \varepsilon_G) ydA + \int_{A2} E_2 (ky + \varepsilon_G) ydA =$$

$$= kE_1 \left[\int_{A1} y^2 dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A2} y^2 dA \right] + \varepsilon_G E_1 \left[\int_{A1} ydA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A2} ydA \right]$$

El primer término entre paréntesis rectos corresponde al momento de inercia de la sección homogénea equivalente.
El segundo término entre paréntesis rectos corresponde al momento de primer orden de la sección homogénea equivalente referido a un eje que pasa por el baricentro, o sea que es nulo. La expresión se reduce a:

$$M = kE_1 I_h$$

3. Tensiones normales

Para determinar las tensiones en cada material, volvemos a la ecuación de equilibrio de momentos en la sección:

Como $M = kE_1 I_h \quad \rightarrow \quad k = \dfrac{M}{E_1 I_h}$

Sustituyendo, la expresión hallada para *k,* en la forma que ya teníamos de las tensiones:

$$\sigma_1(y) = \frac{M.y}{I_h} + E_1 \varepsilon_G = \frac{M.y}{I_h} + \frac{N}{A_h}$$

$$\sigma_2(y) = \frac{E_2}{E_1} \frac{M.y}{I_h} + \frac{E_2}{E_1} E_1 \varepsilon_G = n \cdot \left(\frac{M.y}{I_h} + \frac{N}{A_h} \right)$$

O sea que la tensión del material 1 en la viga original es la misma que en la viga homogeneizada y la tensión en el material 2 en la viga original es n veces mayor que la de la viga homogeneizada.

En definitiva todo se puede resolver usando la viga homogeneizada y luego multiplicando las tensiones obtenidas en el material 2 por n se obtienen las tensiones en la zona 2 de la viga original.

4. Secciones de bandas horizontales

En el caso particular en que la sección compuesta está conformada por una serie de piezas rectangulares, la homogeneización de la sección se simplifica.

Veamos una sección compuesta por dos piezas rectangulares de distinto material, como la que muestra la figura 4, de ancho constante b.

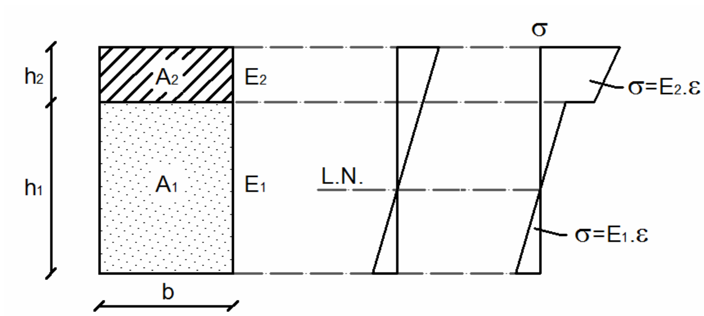

Figura 4: Sección rectangular compuesta y sus diagramas de deformaciones y tensiones

La sección equivalente será en ese caso la mostrada en la figura 5:

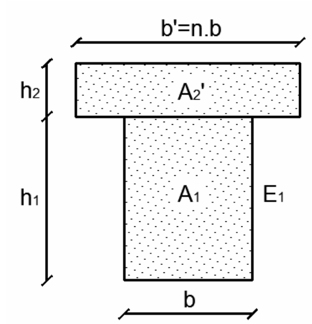

Figura 5: Sección rectangular homogeneizada al material 1.

5. Tensiones rasantes

Recordemos que la tensión rasante en una sección de una viga que flexa por la acción de cargas transversales la podemos determinar mediante la expresión de Jouravsky. Es claro que esta tensión solo depende del cortante y no depende de la directa ni del momento a través de:

$$\tau = \frac{V.\mu}{I.b},$$

donde:

- V es el valor del cortante en la sección en estudio.
- μ es el momento de primer orden del tramo de sección que se encuentra por encima de la fibra donde se está hallando la tensión, respecto del baricentro.
- I es la inercia de la sección considerada (respecto de su baricentro).
- b es el ancho de la sección a la altura de la fibra donde se está hallando la tensión.

Al plantear la expresión de Jouravsky para una sección homogeneizada, tenemos:

$$\tau_h = \frac{V.\mu_h}{I_h.b_h}$$

En este caso:

- V es el valor del cortante en la sección en estudio.
- μ_h es el momento de primer orden del tramo de sección homogénea que se encuentra por encima de la fibra donde se está hallando la tensión, respecto del baricentro de la sección homogénea.
- I_h es la inercia de la sección homogénea (respecto de su baricentro).
- b_h es el ancho de la sección homogeneizada a la altura de la fibra donde se está hallando la tensión.

Si estamos en la zona 1: $b_h = b$ y $\tau = \tau_h$

Si estamos en la zona 2 $b_h = nb$ y $\tau = n\tau_h$

Donde b es el ancho real de la sección a la altura de la fibra donde se calcula la tensión.
Y τ es la tensión rasante real.

Por lo que en ambas zonas se cumple que:

$$\tau = \frac{V.\mu_h}{I_h.b}$$

Llamaremos "R" a la fuerza rasante en una longitud s de la viga:

$$R = \tau.b.s = \frac{V.\mu_h}{I_h.b}.b.s \rightarrow R = \frac{V.\mu_h}{I_h}.s$$

En general nos interesará determinar el valor de la fuerza R en la superficie de contacto entre un material y otro, a los efectos de dimensionar la unión que deberá transmitir dicho esfuerzo entre las partes.

Estos apuntes fueron elaborados por:
Dr. Ing. Atilio Morquio
Ing. Maria Laura Reboredo
Ing. Agustín Spalvier