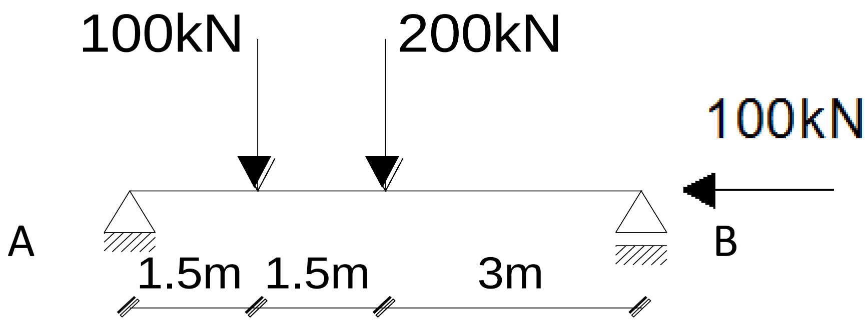
Teoría de vigas 3era parte

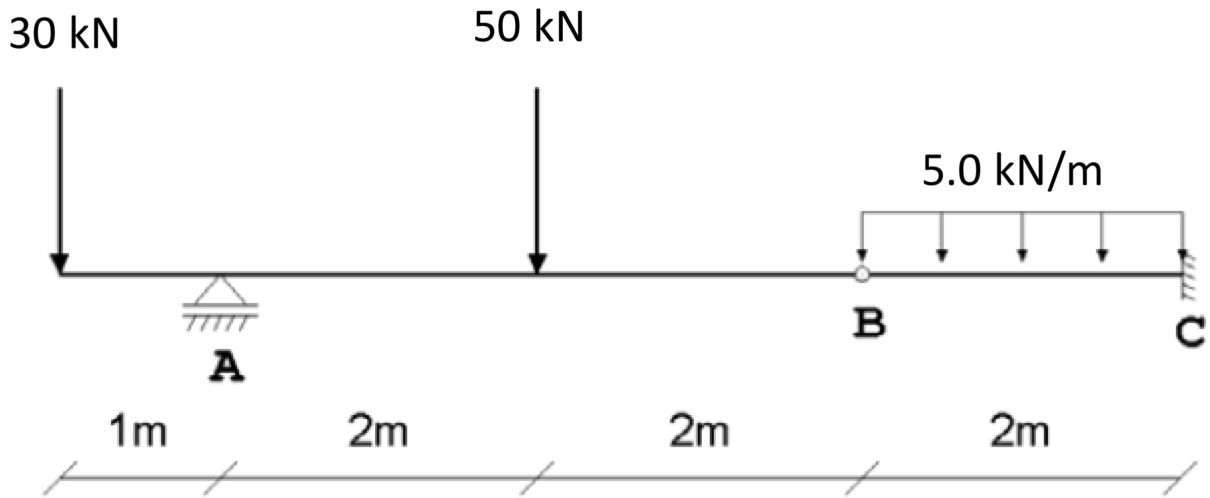
Ejemplo



a) trazar los diagrama de cortante y momento flector y bosquejar cualitativamente la deformada

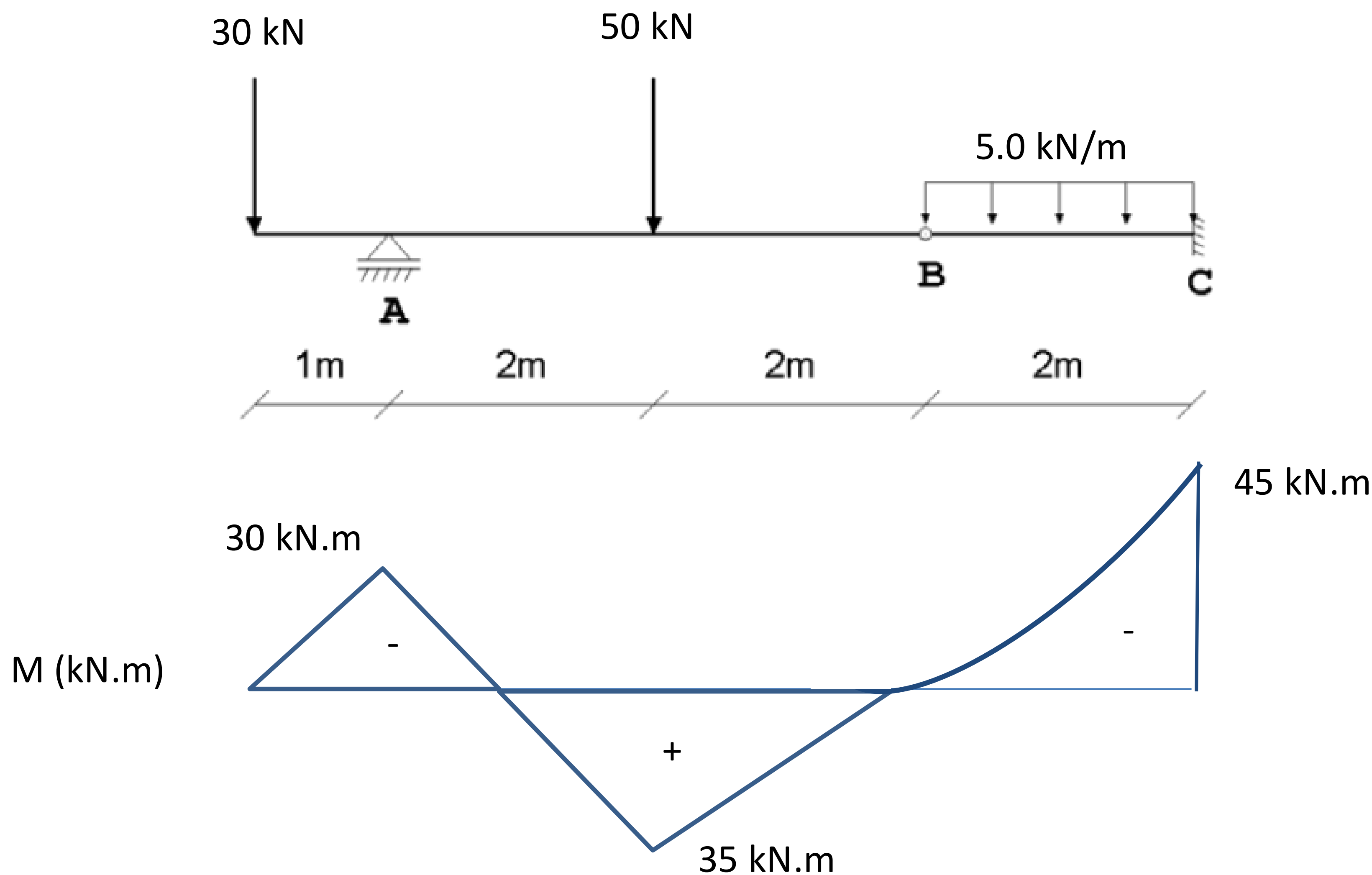
b) dimensionar con una sección cuadrada, sabiendo que la tensión normal admisible es **σ_{adm} = 140 MPa**. Trazar el diagrama de tensiones normales en la sección que dimensiona.

Ejemplo

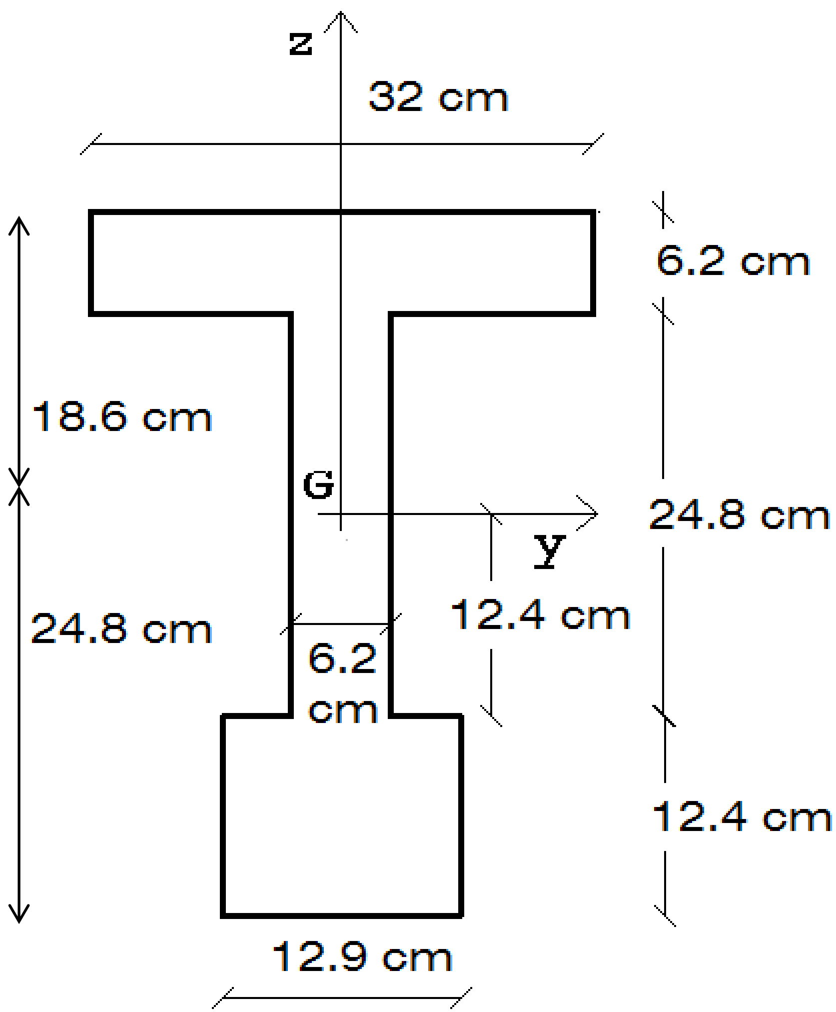


Verificar si las tensiones por flexión de la viga cumplen con los valores admisibles para el material:

σadm tracción = 8 MPa
σadm compresión = 10 MPa


30 kN
50 kN
5.0 kN/m
A
B
C
1m
2m
2m
2m
45 kN.m
30 kN.m
M (kN.m)
-
+
-
35 kN.m

Sección



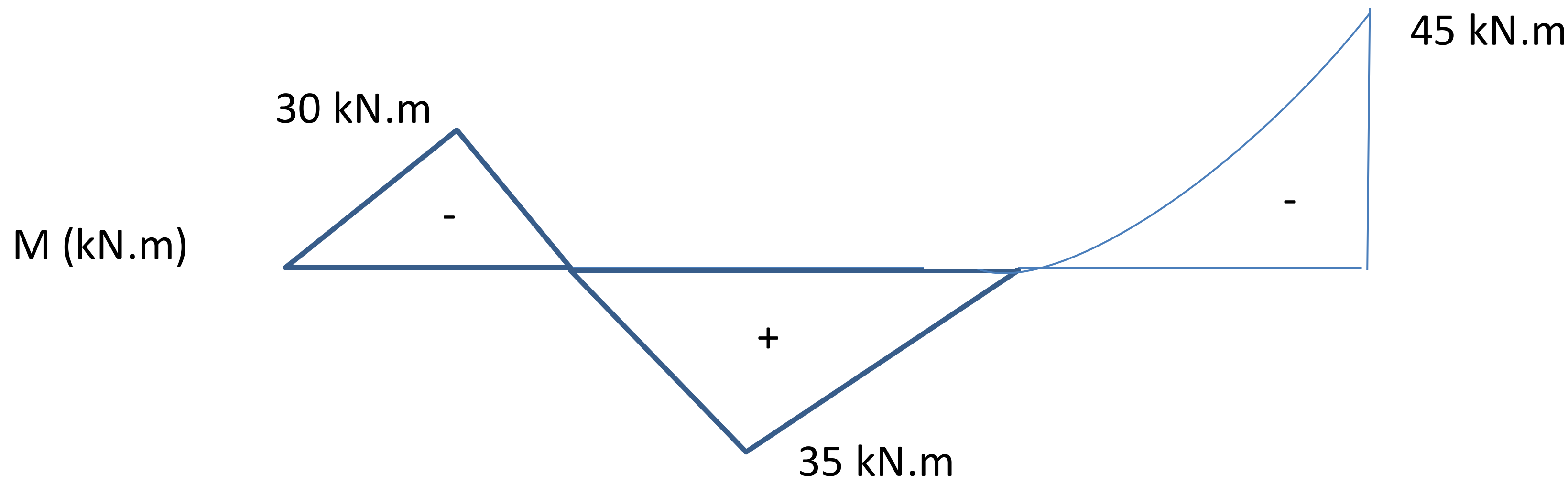
$I_y = 112152.4\ cm^4$

$W_{sup} = 112152.4\ cm^4/18.6\ cm$

$W_{sup} = 6029.7 cm^3$

$W_{inf} = 112152.4\ cm^4/\ 24.8\ cm$

$W_{inf} = 4522.3\ cm^3$



$\sigma_{adm\ tracción} = 8$ MPa
$\sigma_{adm\ compresión} = 10$ MPa

$W_{sup} = 6029.7 cm^3$

$W_{inf} = 4522.3\ cm^3$

$M^+ = 35$ kN.m

$\sigma_{tracción} = 35/Winf$

$\sigma_{compresión} = 35/Wsup$

$M^- = 45$ kN.m

$\sigma_{\ compresión} = 45/W_{inf}$

$\sigma_{\ tracción} = 45/W_{sup}$

Tensiones

M^{+}=35 kN.m

$\sigma_{tracción}$= 35/W_{inf}=7.7 MPa

$\sigma_{compresión}$= 35/W_{sup} =5.8 MPa

M^{-}= 45 kN.m

$\sigma_{compresión}$ = 45/W_{inf} = 9.95 MPa

$\sigma_{tracción}$ = 45/W_{sup} = 7.5 MPa

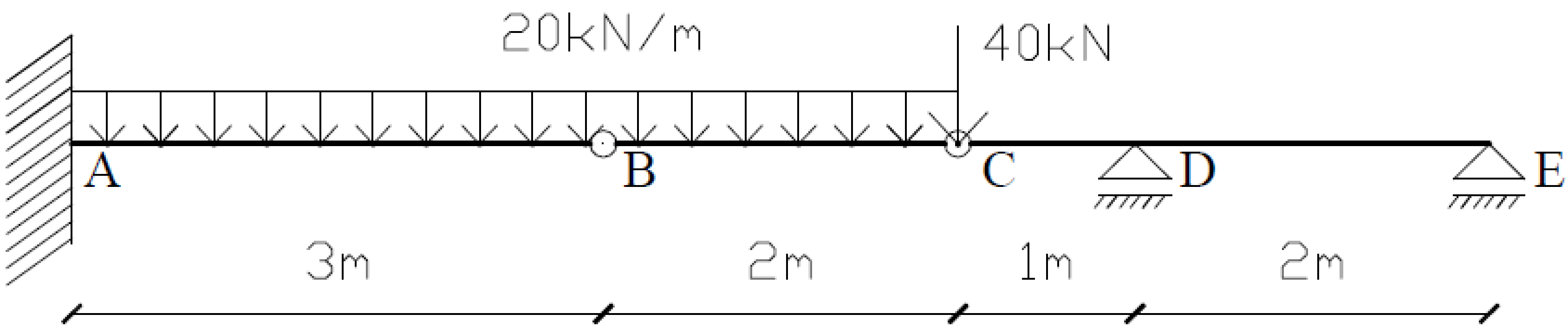
Ejemplo Ex. Julio 2005

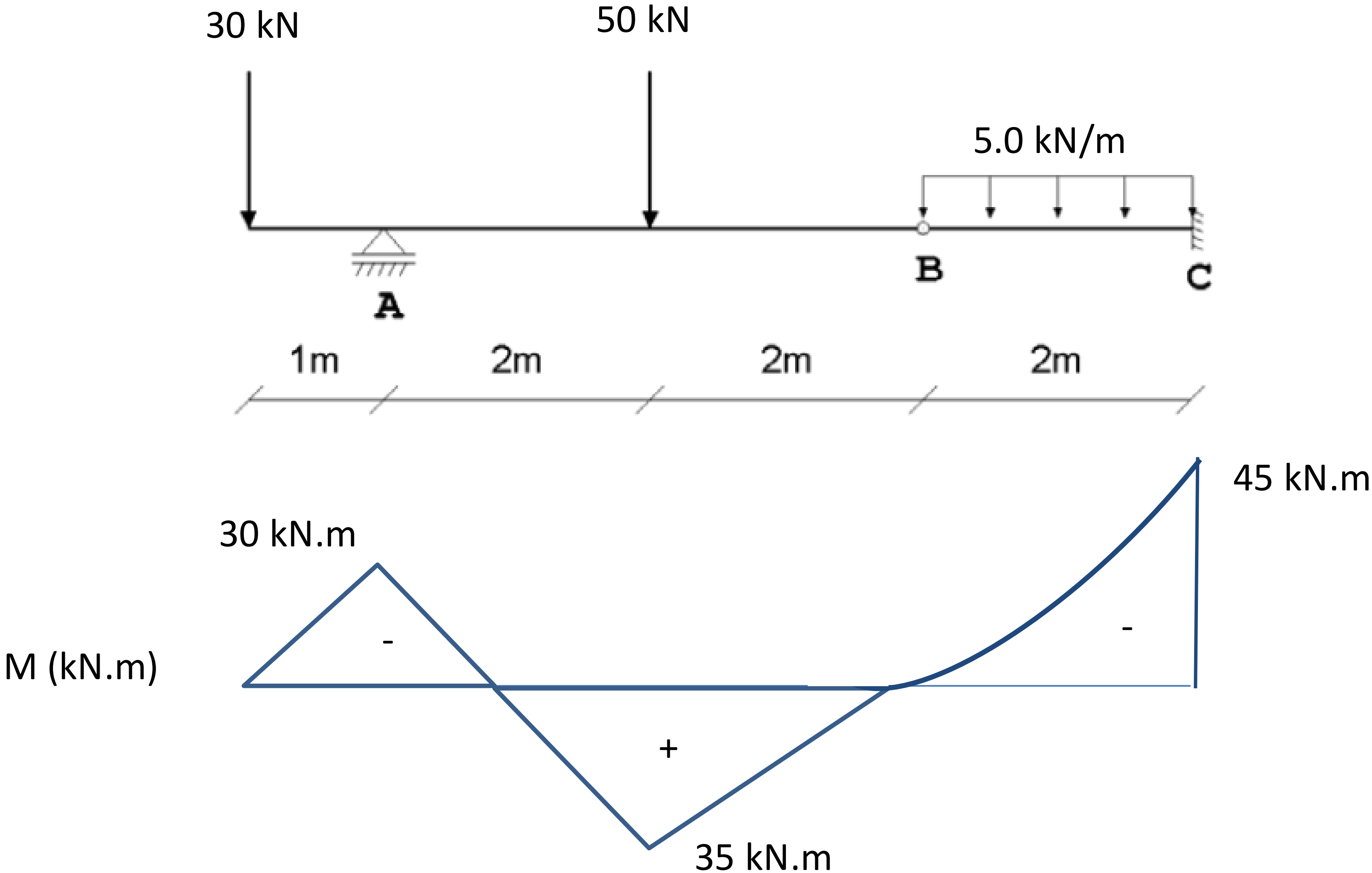
Para la viga de la figura, se pide:

a) Hallar reacciones.

b) Trazar diagrama de solicitaciones.

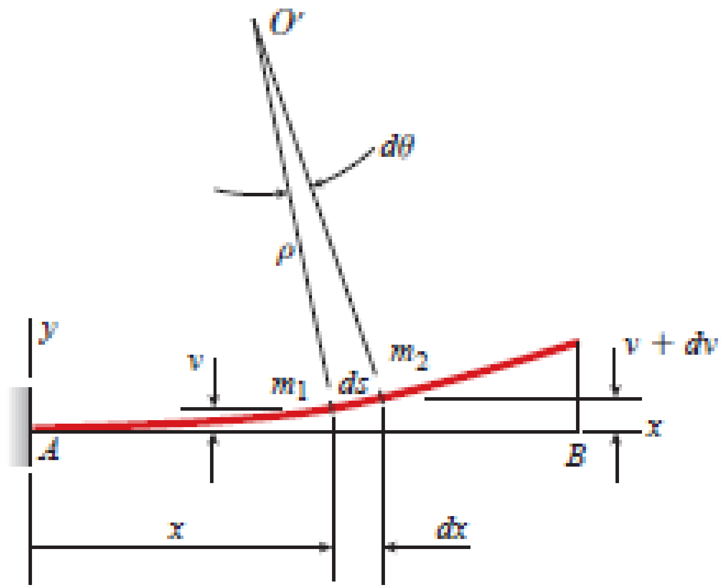
c) Dimensionar la viga con un perfil **PNI** considerando σ_{adm} **= 140 MPa**.

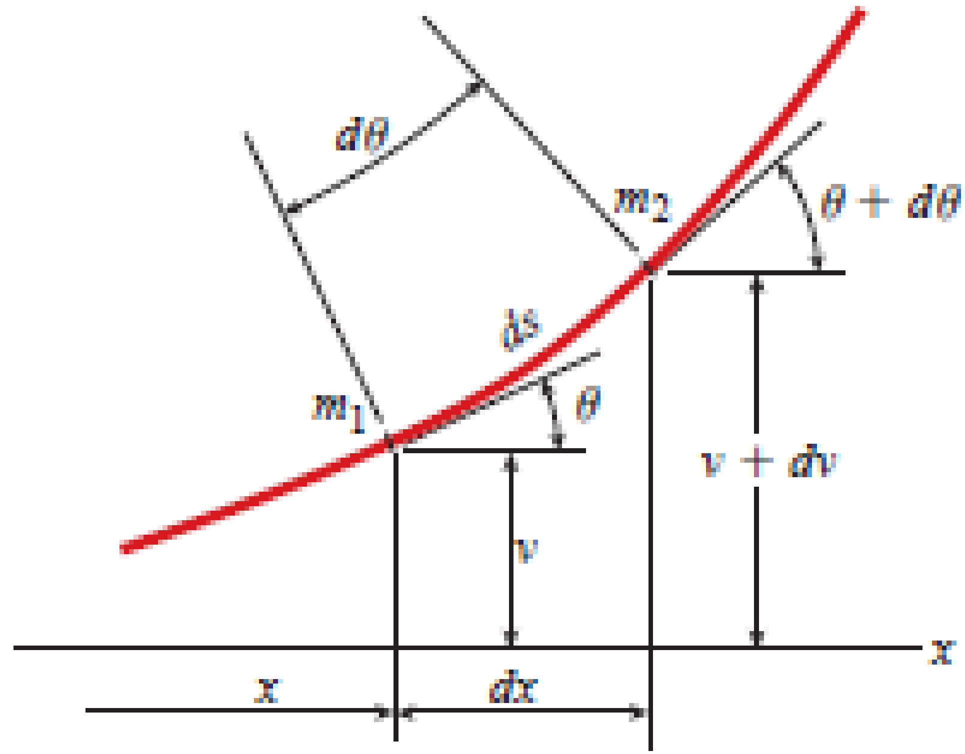




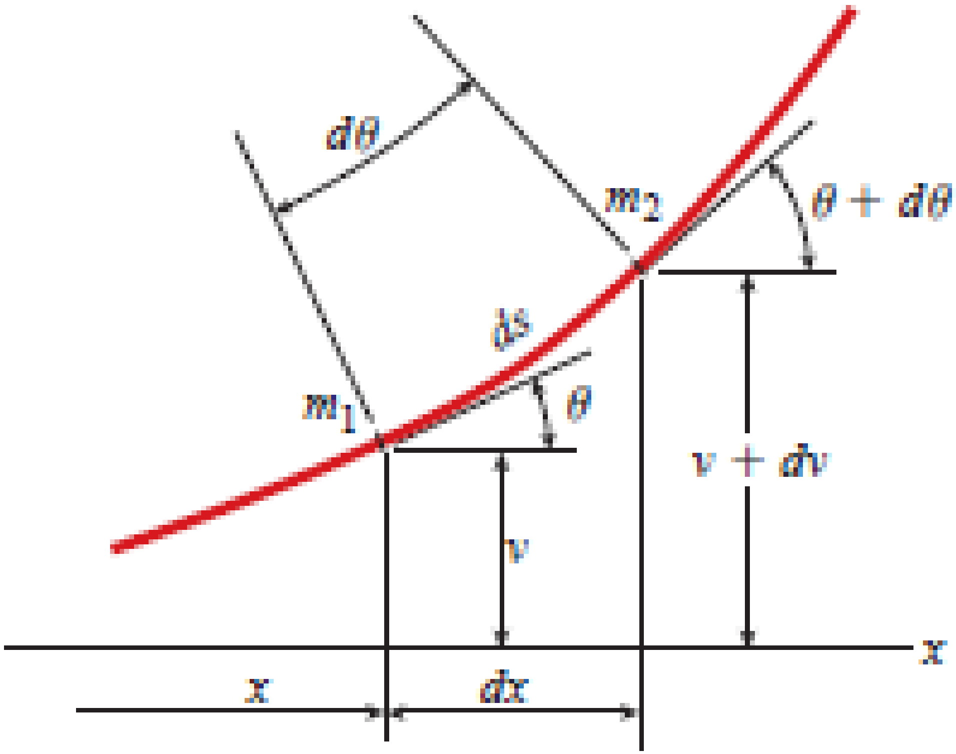
30 kN
50 kN
5.0 kN/m
A
B
C
1m
2m
2m
2m
45 kN.m
30 kN.m
M (kN.m)
-
+
-
35 kN.m

Deflexiones ("Elástica") de la viga





Deflexiones ("Elástica") de la viga



κ=1/ρ: ***Curvatura***
v: ***desplazamiento perp. al eje***
ϑ: ***ángulo de giro***

$$\rho \, d\theta = ds$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

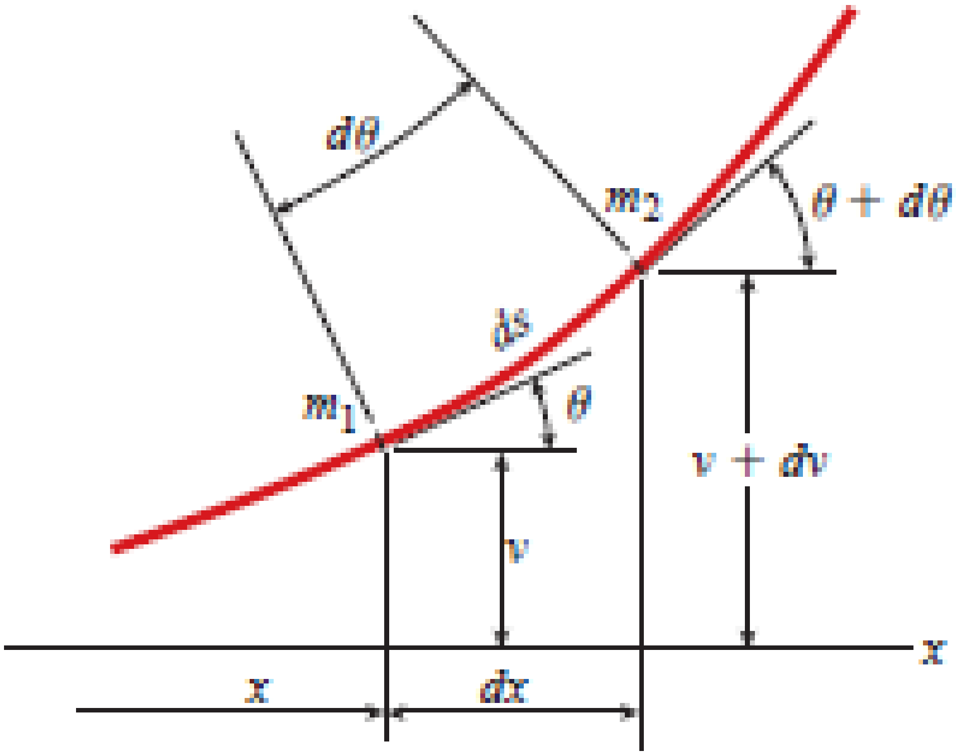
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

Relación momento-curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

Vamos a obtener **la relación entre desplazamientos, giros, y curvatura** para cada punto de la viga.

Deflexiones ("Elástica") de la viga



κ=1/ρ: ***Curvatura***
v: ***desplazamiento perp. al eje***
ϑ: ***ángulo de giro***

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\tan(\theta) = \frac{d\upsilon}{dx}$$

Pequeñas deformaciones: $\theta = \frac{d\upsilon}{dx}$

La relación entre desplazamientos, giros, y curvatura para cada punto de la viga:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d(dv/dx)}{dx} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$

Deflexiones (“Elástica”) de la viga

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$

Ecuación diferencial de la curva de deflexión (o **ecuación de la elástica**):

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

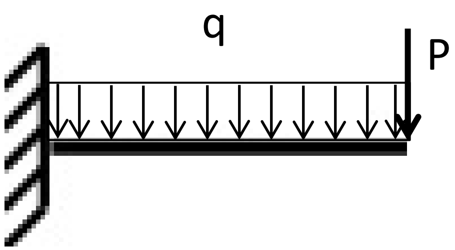
Si conocemos la expresión de M/EI para todo x de la viga, podremos integrar dos veces la ecuación de la elástica, obteniendo una expresión de v con dos constantes de integración (C1 y C2).

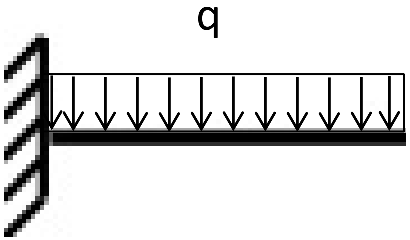
En la práctica no haremos la integración analítica, salvo que sea estrictamente necesario.

Se disponen de varios métodos alternativos, de los cuales, en el curso veremos dos en detalle:
- Método de superposición.
- Viga análoga.

Ejemplo

Hallar el descenso y el giro a lo largo de la ménsula en función de EI.





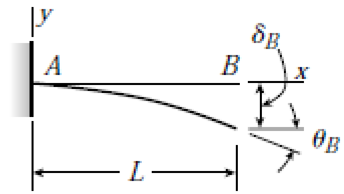
Método de superposición (1º) - Tabulación

Las deflexiones y giros en **vigas empotradas** y **vigas simplemente apoyadas** se encuentran resueltas y tabuladas para una serie habitual de configuraciones de carga. En el EVA, en el apéndice G del libro Gere, o en Internet, se pueden encontrar colecciones completas de casos.

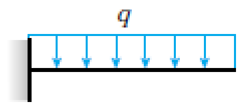
En base a estas tablas, se pueden determinar los desplazamientos **en estos tipos de vigas** para **combinaciones de cargas** mediante el **principio de superposición**.

Ejemplos:

TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS

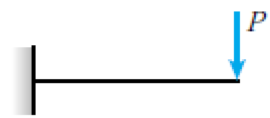


v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam
$\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam
$\boxed{EI = \text{constant}}$



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

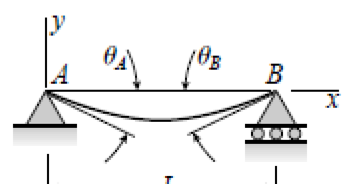
$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$



$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

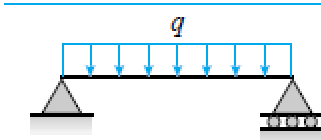
$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

TABLE G-2 DEFLECTIONS AND SLOPES OF SIMPLE BEAMS



EI = constant

v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_C = -v(L/2)$ = deflection at midpoint C of the beam
x_1 = distance from support A to point of maximum deflection
$\delta_{max} = -v_{max}$ = maximum deflection
$\theta_A = -v'(0)$ = angle of rotation at left-hand end of the beam
$\theta_B = v'(L)$ = angle of rotation at right-hand end of the beam

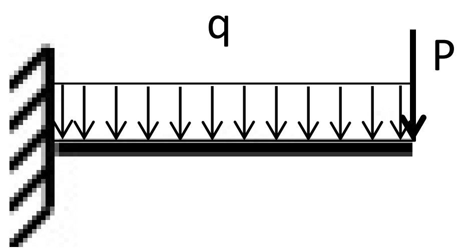


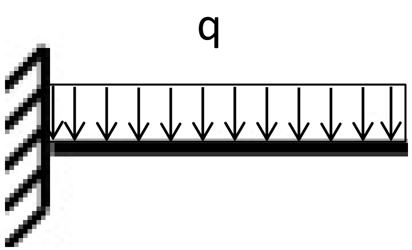
$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

Superposición





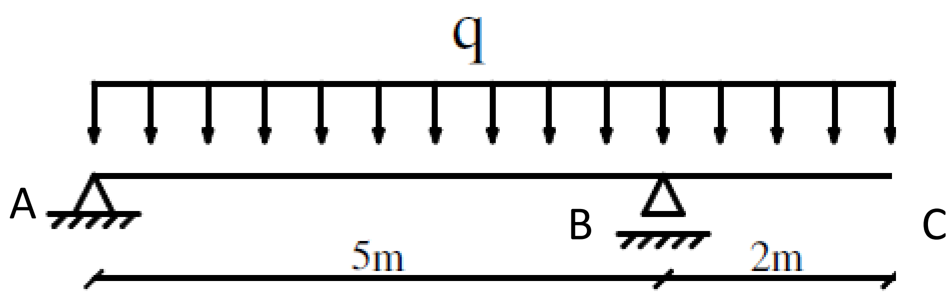
$$\upsilon(L) = \frac{q * L^4}{8EI} \downarrow \qquad \theta(L) = \frac{q * L^3}{6EI}$$

$$\upsilon(L) = \frac{P * L^3}{3EI} \downarrow \qquad \theta(L) = \frac{P * L^2}{2EI}$$

$$\upsilon(L) = \frac{q * L^4}{8EI} + \frac{P * L^3}{3EI}$$

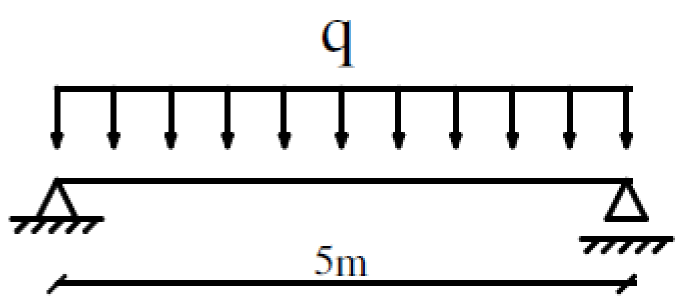
$$\theta(L) = \frac{q * L^3}{6EI} + \frac{P * L^2}{2EI}$$

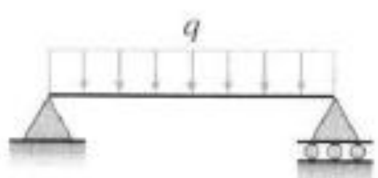
Método de superposición



Giro en A y flecha en C

Giro en A





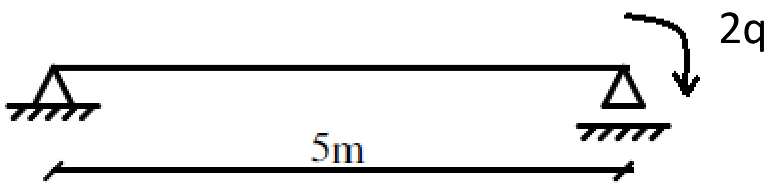
$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{\text{máx}} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

θ_{1A} =q*(5 m)^3/(24EI)

horario



$$v = -\frac{M_0 x}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{M_0}{6LEI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_C = \frac{M_0 L^2}{16EI} \qquad \theta_A = \frac{M_0 L}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$

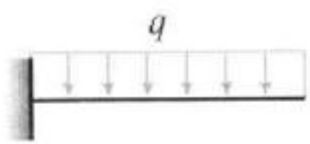
$$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{y} \quad \delta_{\text{máx}} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}\,EI}$$

θ_{2A} =-2 m*q*1 m*5 m/(6EI) Antihorario

θ_{ATOTAL}=θ_{1A}+θ_{2A}

θ_{ATOTAL} = q*(5 m)^3/(24EI)-2 m*q*1 m*5 m/(6EI)

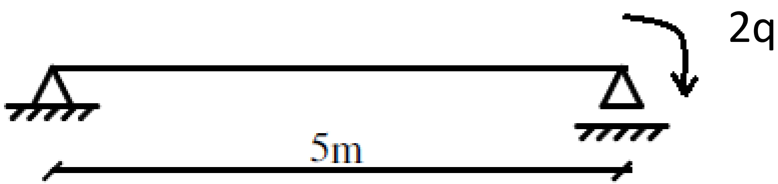
Deflexión en C



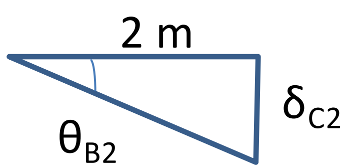
$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

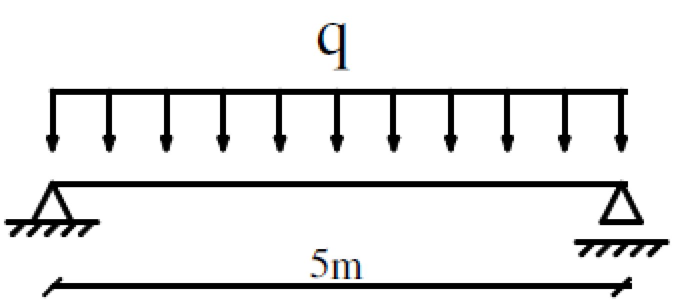
δ_{C1} =q*(5 m)^4/(8EI) ↓

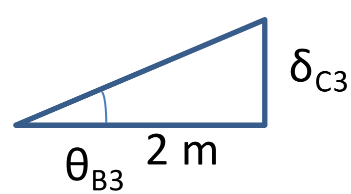


θ_{B2} =-2 m*q*1 m*5 m/(3EI)



δ_{C2} =2*(2 m*q*1 m*5 m/(3EI) ↓





θ_{B3} =q*(5 m)^3/(24EI)

δ_{C3} =-2*(q*(5 m)^3/(24EI)) ↑

$$\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} + \delta_{C3}$$