

Teoría de vigas

- Introducción
- Ejemplos
- Relación entre cargas y solicitaciones
- Deformaciones por flexión y curvatura
- Esfuerzos normales en flexión
- Relación momento-curvatura
- Dimensionado de vigas
- Deflexiones en vigas
 - Métodos de resolución

Bibliografía:

Gere, 5ª Ed. (2002):

4.1 a 4.5, 5.1 a 5.7 y 5.12, 9.1 a 9.5

Beer, 3ª Ed. (2004):

4.1 a 4.5, 4.12, 5.1 a 5.4, 9.1 a 9.3, 9.7

Ortiz Berrocal, 3ª Ed. (2007):

4.1 a 4.5, 5.1 a 5.2, 5.4 a 5.5

Introducción: Vigas

Las **vigas** son **barras** sometidas principalmente a **cargas (fuerzas o momentos)** con la **dirección de sus vectores ortogonales al eje de la viga**.

En la viga se transmitirán momentos y cortantes.

Relación entre **cargas, solicitaciones** (cortantes y momentos), **deformaciones, giros y desplazamientos** (descensos) **en vigas**.

Flexión en estructuras tipo

Vigas

1) Simplemente apoyada (S.A.)

2) En ménsula

3) Bi-empotrada

4) Continua

5) S.A. con voladizo

6) Vigas Gerber

Pórticos

7) Pórtico simplemente apoyado

8) Pórticos múltiples

9) Arco de 3 articulaciones

Carga distribuida

Carga distribuida (q): Carga por unidad de longitud de barra. Ejemplos: el peso propio de los materiales en barras horizontales, o el peso de un material que se apoya en éstas, la presión de líquidos o el viento. Unidad: [N/m] (usualmente: [kN/m])

La fuerza en un diferencial de largo de barra dx estará dada por: $dF = q * dx$.

Por lo tanto, en un tramo de barra de largo L , la **resultante** de la carga distribuida se obtiene integrando los dF , y su posición igualando los momentos de ésta, con los de la carga distribuida.

Gráficamente: La **resultante** está dada por el **área bajo el diagrama** de carga $q(x)$, y su **línea de acción**, pasa por el **centro de gravedad** de dicha área.

Solicitaciones: Cortante y Momento

Acciones internas (solicitaciones): Fuerzas que se transmiten internamente por un elemento. Se pueden visualizar “cortando” y aislando imaginariamente una parte de un elemento.

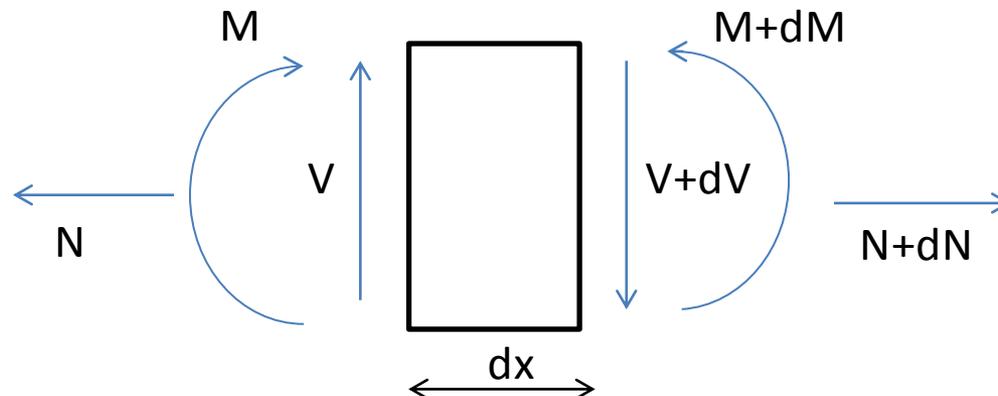
Si trabajamos en el plano, las acciones internas transmitidas se pueden reducir a un torsor (una fuerza y un momento) aplicado en el eje de la sección.

En base a este torsor, se pueden definir cada una de las **solicitaciones**:

N-Fuerza axial (o *directa*, o *fuerza normal*): componente de la fuerza del torsor en la dir. del eje.

V-Fuerza cortante (o simplemente *cortante*): componente de la fuerza en dir. perpendicular al eje.

M-Momento flector (o simplemente *momento*): momento del torsor.



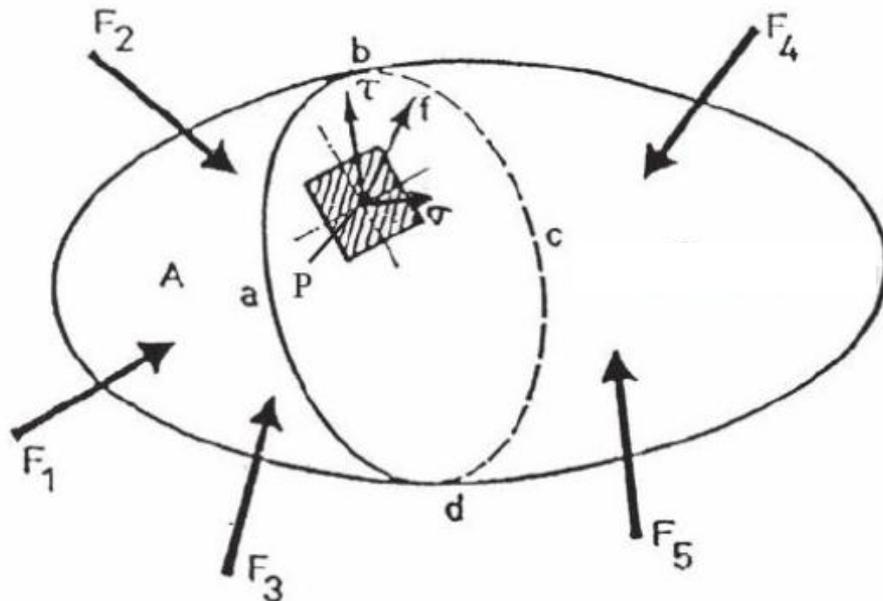
Tensiones internas

Si de un cuerpo en equilibrio, aislamos (“cortamos”) una parte, ésta también tiene que estar en equilibrio. Para ello, cómo ya vimos, aparecen fuerzas que llamamos sollicitaciones (M, V, N).

Por lo tanto, para cada porción de la sección que nos tomemos ($\Delta\Omega$), habrá en general una fuerza (ΔF) aplicada.

En realidad, en el plano que cortamos (definido por la normal (n) a dicho plano) no hay sólo fuerzas en el baricentro de la sección, sino que cada trozo de área de la sección pueden estar bajo un esfuerzo.

La definición de tensión se obtiene extendiendo el concepto anterior para una región infinitesimal de área. Por lo tanto:



La **tensión** (f) actuando en un punto P en un plano n dado **se define** como el límite:

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta\Omega} = f(P)$$

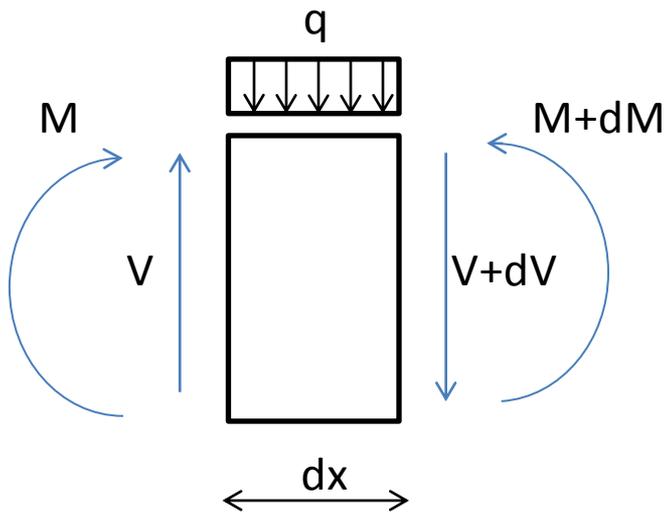
Relación entre q, V y M

Estableceremos la relación matemática entre **q**, **V** y **M**.

Teorema Fundamental de Vigas:

Caso de carga distribuida q:

$$-q = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$



Suma de F verticales = 0

$$V - (V + dV) - q \cdot dx = 0$$

$$q = -dV/dx$$

Suma de M = 0

$$M - M - dM + q \cdot dx \cdot dx/2 + (V + dV) \cdot dx = 0$$

$$-dM + q \cdot dx \cdot dx/2 + (V + dV) \cdot dx = 0$$

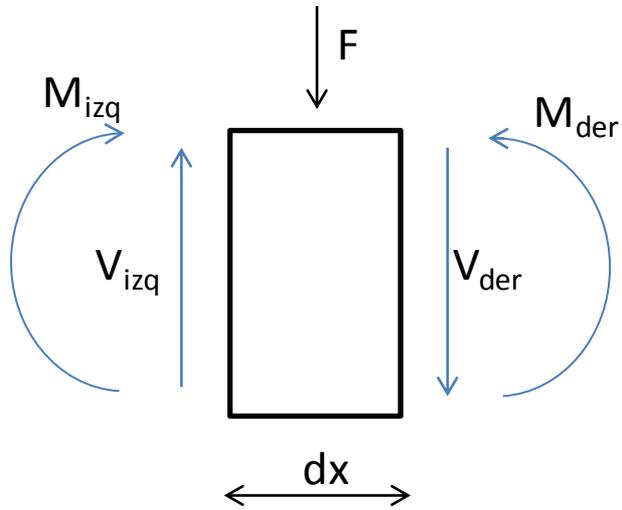
Despreciando los términos dif. de 2do orden

$$-dM + V \cdot dx = 0$$

$$V = dM/dx$$

Relación entre q, V y M

Caso carga puntual:



Suma de F verticales = 0

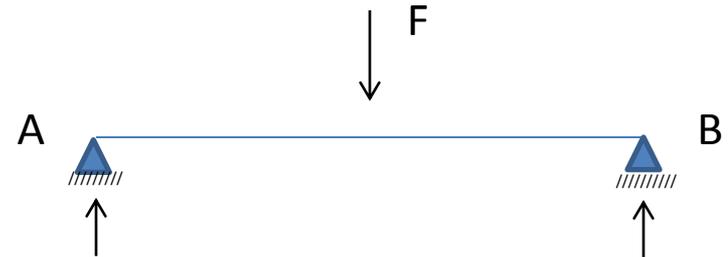
$$V_{izq} - V_{der} - F = 0 \quad V_{der} = V_{izq} - F$$

Suma de M = 0

$$M_{izq} - M_{der} + dx * V_{der} + F * dx / 2 = 0 \quad M_{izq} = M_{der}$$

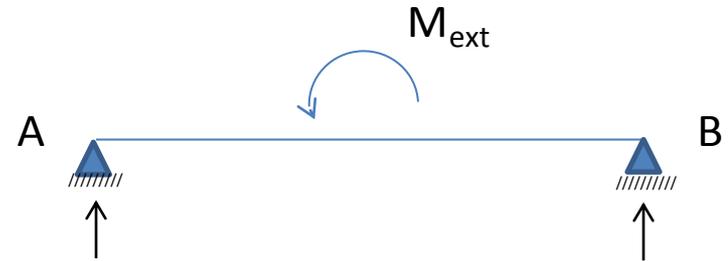
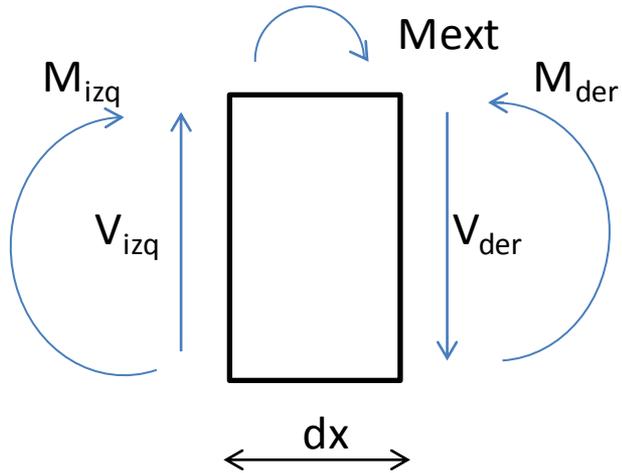
Convención de signos para el Cortante:

Una fuerza cortante positiva actúa en sentido horario contra el material. Una negativa lo hace en sentido antihorario.



Relación entre q, V y M

Caso Momento puntual:



Suma de M = 0

$$M_{izq} - M_{der} + M_{ext} + dx * V_{der} = 0$$

$$M_{der} = M_{izq} + M_{ext}$$

Suma de V = 0

$$V_{der} = V_{izq}$$

DEFLEXIONES Y DESPLAZAMIENTOS

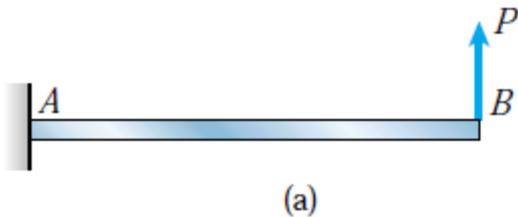
Deformaciones producidas por flexión

Hipótesis:

- La **viga** está **contenida en un plano xy** , y su **sección es simétrica respecto a dicho plano**.
- Además, **las fuerzas** sobre la viga actúan con sus vectores en el **plano xy** , y los **momentos** en dirección **perpendicular a dicho plano**.

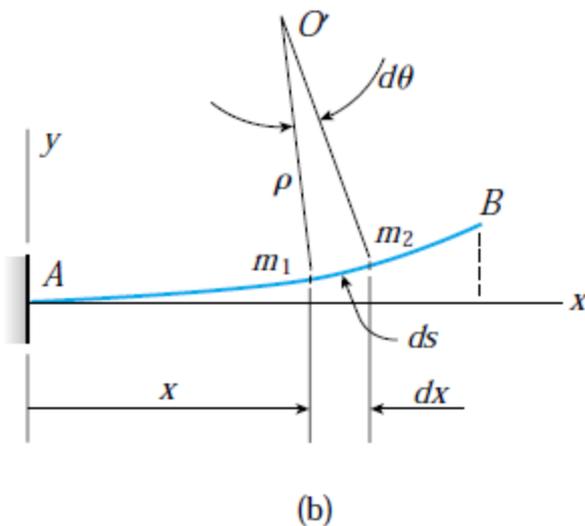
Si consideramos una viga originalmente recta, luego de aplicada la carga, el eje se deformará en una curva, que llamaremos **deformada** (o **elástica**) de la viga.

=> Aceptaremos que bajo las hipótesis dadas, **la viga se deformará en el plano xy** .



Convención de signos:

Para **x** hacia la derecha e **y** hacia arriba, **κ** es **positivo** con la **concavidad hacia arriba**.



$$\rho d\theta = ds$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

O' : **Centro de curvatura.**

$m_1 O' = \rho$: **Radio de curvatura.**

$\kappa = 1/\rho$: **Curvatura**

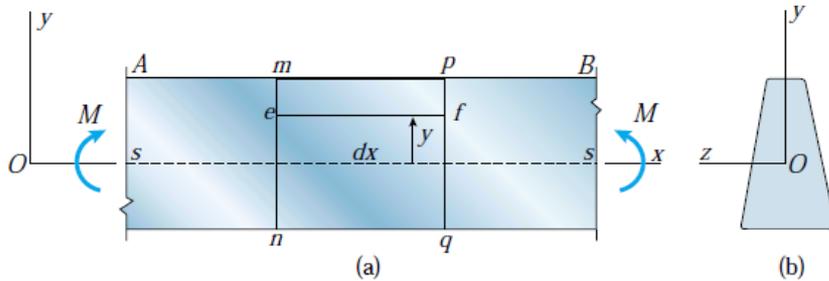
$v(x)$ **perp. al eje (X)**

Relación “ $\epsilon - \rho$ ” en flexión pura

En una viga sometida a **flexión pura** analizaremos la **relación entre el momento aplicado**, las **tensiones** que este produce, y la **curvatura** de la viga. Posteriormente veremos que esta relación se puede utilizar en los casos de flexión simple y flexión compuesta.

El **primer paso** es determinar la **relación entre el radio de curvatura (ρ)** y las **deformaciones unitarias (ϵ)** en una sección de viga.

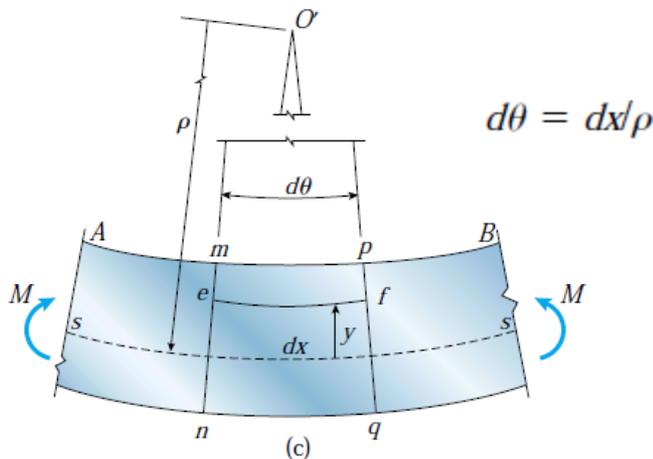
Hipótesis de Navier-Bernoulli:
Las **secciones transversales normales al eje de la viga** indeformada **permanecen planas y normales al eje** después de producirse las deformaciones producidas por flexión pura.



$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}$$

El origen de coordenadas (**O**) es genérico. Es decir, en principio no sabemos la posición del eje neutro.

Para obtener esta relación, sólo intervinieron propiedades de la geometría de la viga, y la hipótesis de Navier.



Segmento e f $L_1 = (\rho - y) * d\theta = (\rho - y) * dx / \rho$

$$\epsilon = \frac{L_1 - L}{L} = \frac{dx - y / \rho * dx - dx}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

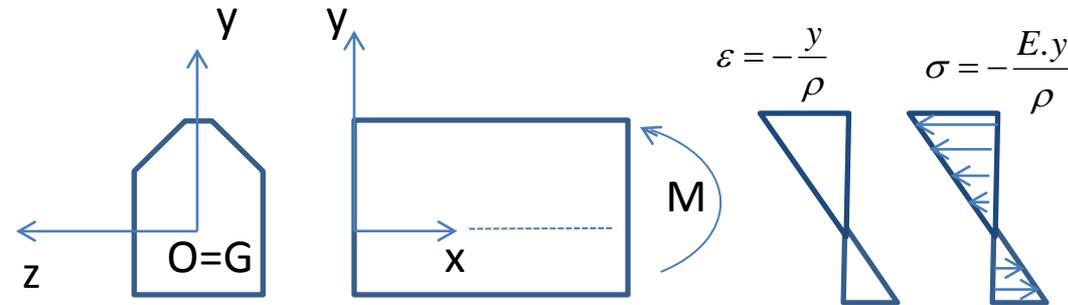
Relación “ $\sigma - \rho$ ” en flexión pura

1) Conocida la distribución de deformaciones en una viga ($\varepsilon = -y/R$), para conocer como serán los esfuerzos, es necesario utilizar la relación tensión-deformación del material:

Ley de Hooke:

$$\sigma = E.\varepsilon$$

$$\sigma = -\frac{E.y}{\rho}$$

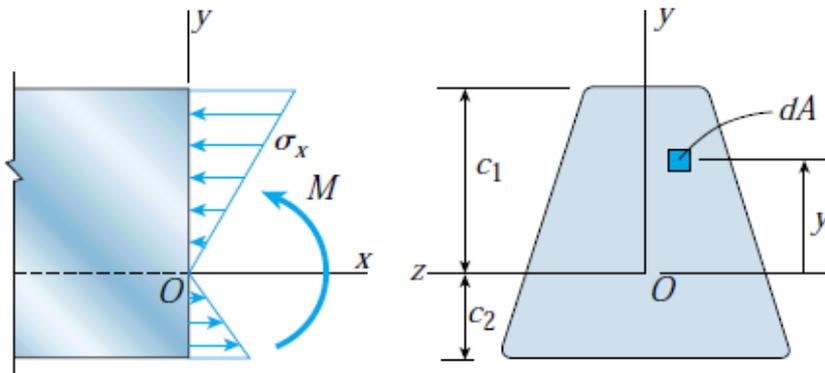


Directa resultante de las σ en la sección:

$$N = \int_{\Omega} \sigma * d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{E.y}{\rho} d\Omega$$

$$N = -\frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y d\Omega$$

Flexión pura: $N=0$



(a)

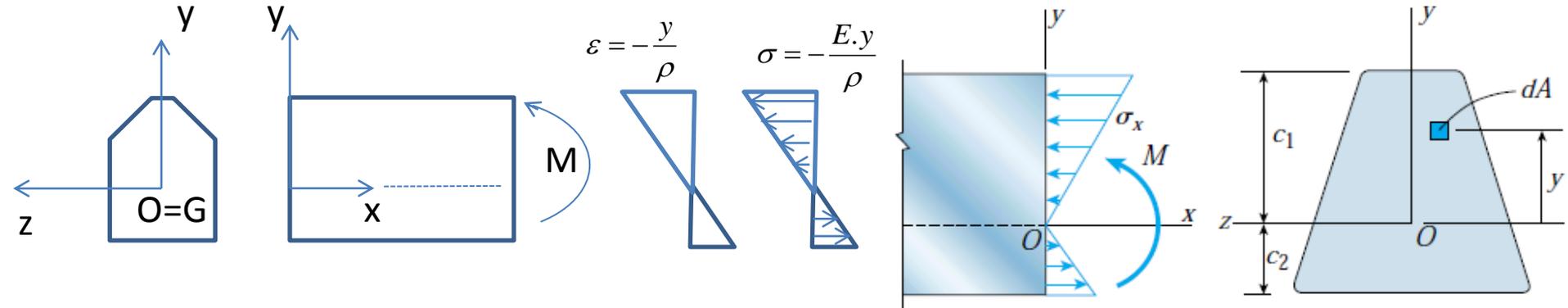
(b)

$$m_O = \int_A y dA$$

Momento estático (o de **primer orden**) de la sección, con respecto a O.

Relación “ $\sigma - \rho$ ” en flexión pura

2) Conociendo la distribución de tensiones, podemos calcular las solicitaciones que éstas producen, e igualarlas con las existentes en la viga. Como suponemos la viga en flexión pura, ésta está sometida a un Momento (M) y la fuerza normal es nula ($N=0$)



$$M = -\int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA \quad M = -\int_A E \cdot \varepsilon \cdot y \cdot dA \quad \varepsilon = -\frac{y}{\rho}$$

“Inercia de la sección”

$$I = \int_A y^2 dA$$

$$M = -\int_A E \cdot (-y / \rho) \cdot y \cdot dA = E / \rho \int_A y^2 dA$$

Momento de inercia (o **Momento de segundo orden**) de la sección.

$$\boxed{\frac{M}{E \cdot I} = 1 / \rho} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{y}{\rho} = \frac{\sigma}{E} = -y \cdot \left(\frac{M}{EI} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}}$$

Esfuerzos máximos por flexión pura

Analizando la fórmula de la flexión, se observa que las tensiones máximas de tracción y compresión ocurren en los puntos más alejados de la fibra neutra (baricentro).

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$

Llamamos y^s e y^i a la distancia desde el eje neutro a los puntos de la sección, superior e inferior respectivamente, más alejados del eje neutro.

Dado que los $|y|$ e I son siempre positivos, los W también lo serán.

Por lo que, en forma simplificada (obviando el signo), podemos decir:

En base a estas distancias podemos definir:

$$W^s = \frac{I}{|y^s|} \quad W^i = \frac{I}{|y^i|}$$

W^i y W^s : **Módulos resistentes** de la sección.

Esta cantidad reúne las propiedades de la sección que intervienen en el cálculo de las tensiones máximas. Por ello suele tabularse para facilitar la tarea de diseño.

Normalmente, aparece sólo un W tabulado, utilizando el

$$y_{max} = \max(y^s, y^i):$$

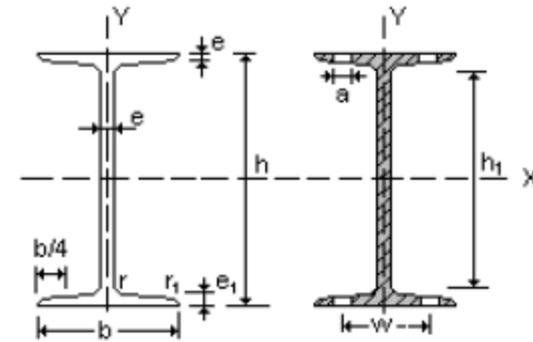
$$W = \frac{I}{|y_{max}|}$$

Además, en caso que $y = y^s = y^i$ se tendrá un solo $W = W^i = W^s$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}$$

Estudiando posteriormente por inspección el signo de la tensión.

Secciones normalizadas



A = Area de la sección

S_x = Momento estático de media sección, respecto a X.

I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X.

$W_x = 2I_x : h$: Módulo resistente de la sección, respecto a X.

$i_x = (I_x : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a X

I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y.

$W_y = 2I_y : b$. Módulo resistente de la sección, respecto a Y.

$i_y = (I_y : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y

I_t = Módulo de torsión de la sección.

I_a = Módulo de alabeo de la sección.

u = Perímetro de la sección.

a = Diámetro del agujero del roblón normal.

w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros.

h_1 = Altura de la parte plana del alma.

e_2 = Espesor del ala en el eje del agujero.

p = Peso por metro.

Perfil	Dimensiones							Términos de sección							
	h mm	b mm	$e = r$ mm	e_1 mm	r_1 mm	h_1 mm	u mm	A cm ²	S_x cm ³	I_x cm ⁴	W_x cm ³	i_x cm	I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm
IPN 80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	304	7,58	11,4	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
IPN 100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	370	10,6	19,9	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
IPN 120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	439	14,2	31,8	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
IPN 140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	502	18,3	47,7	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
IPN 160	160	74	6,3	9,5	3,8	125	575	22,8	68,0	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
IPN 180	180	82	6,9	10,4	4,1	142	640	27,9	93,4	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
IPN 200	200	90	7,5	11,3	4,5	159	709	33,5	125	2140	214	8,00	117	26,0	1,87
IPN 220	220	98	8,1	12,2	4,9	175	775	39,6	162	3060	278	8,80	162	33,1	2,02
IPN 240	240	106	8,7	13,1	5,2	192	844	46,1	206	4250	354	9,59	221	41,7	2,20
IPN 260	260	113	9,4	14,1	5,6	208	906	53,4	257	5740	442	10,4	288	51,0	2,32
IPN 280	280	119	10,1	15,2	6,1	225	966	61,1	316	7590	542	11,1	364	61,2	2,45

$$I = \int_A y^2 dA$$