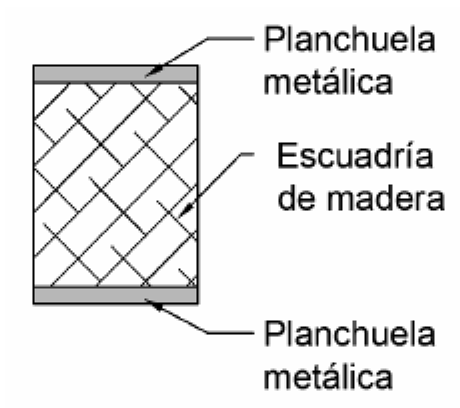
Secciones Compuestas

Secciones Compuestas



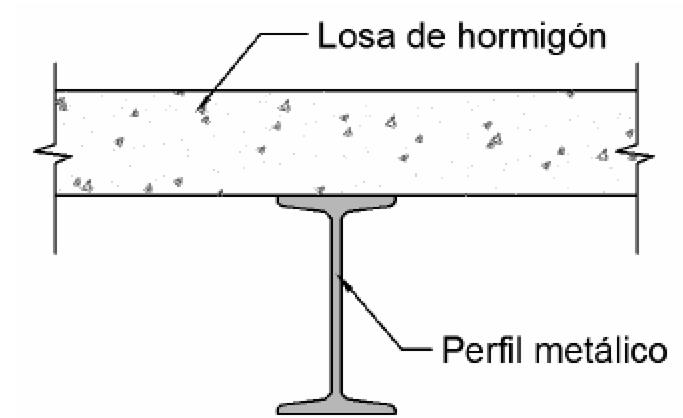


Figura 1: Ejemplos usuales de vigas con secciones compuestas

Notas realizadas en base a apuntes de RII (Autores: Morquio, Reboredo y Spalvier)

Hipótesis

- Las secciones planas se mantienen **planas y perpendiculares** al eje de la viga luego de la flexón (Navier). Por lo que las deformaciones unitarias serán proporcionales a la distancia a la linea neutra. También la **Ley de Hooke.**

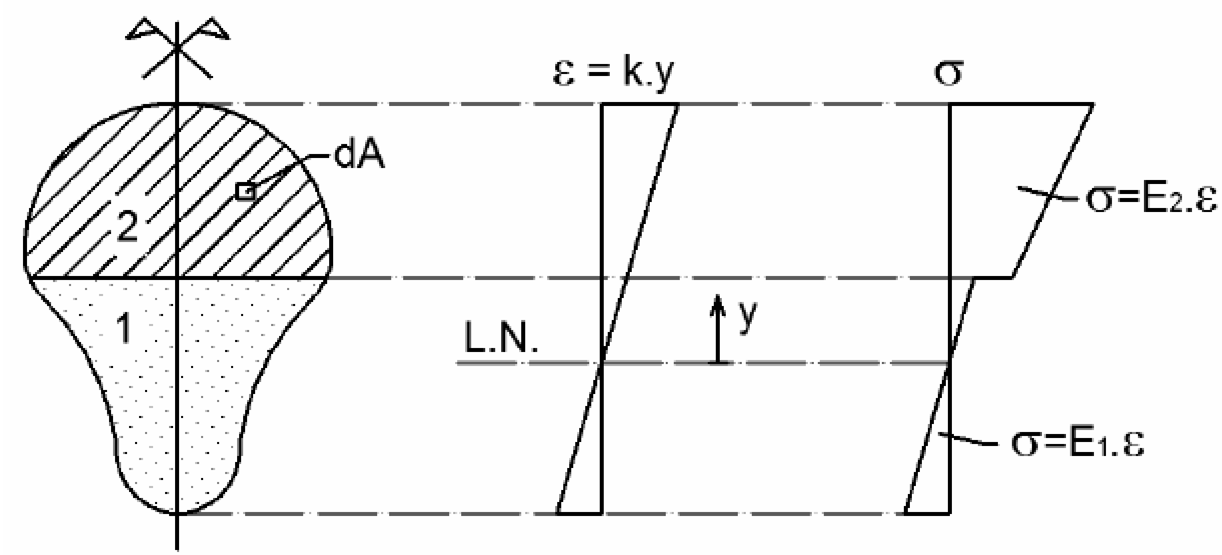
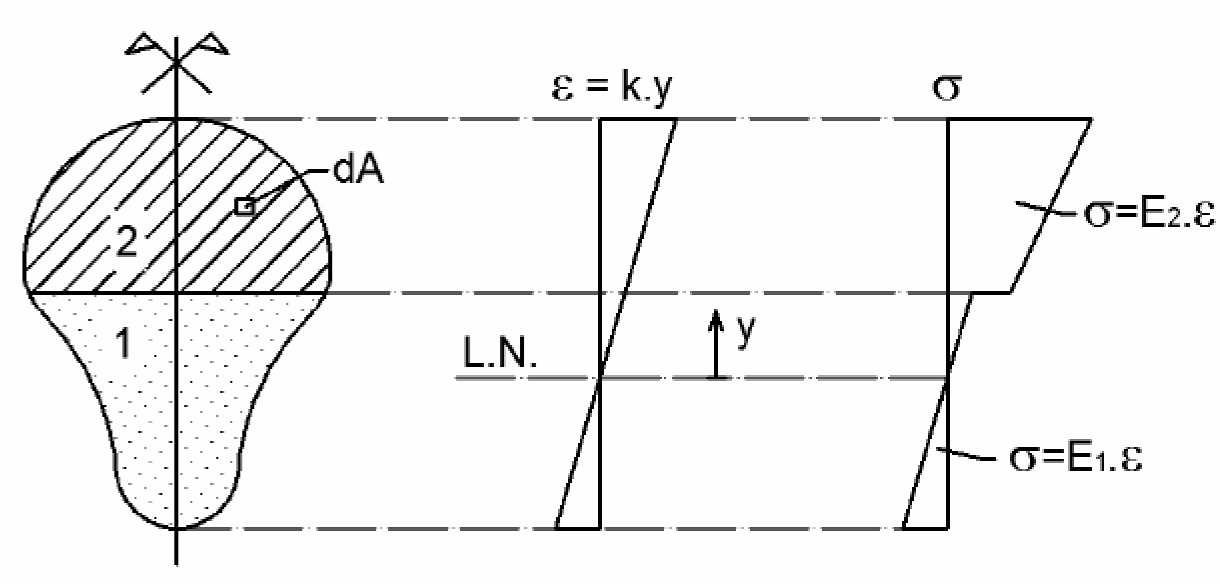


Figura 2: Sección compuesta y sus diagramas de deformaciones y tensiones



Material 2
Módulo de elasticidad E2

Material 1
Módulo de elasticidad E1

Supondremos que E1< E2,

Las def. unitarias: ε= k.y

→ Al cumplir la ley de Hooke: σ1=ε.E1=k.y.E1
σ2=ε.E2=k.y.E2

Para determinar la LN y la constante k, igualo los esfuerzos internos a las fuerzas externas

$$N = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA \qquad M = \int_{A_1} \sigma_1 . y dA + \int_{A_2} \sigma_2 . y dA$$

$$N = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = \int_{A_1} E_1 ky dA + \int_{A_2} E_2 ky dA$$

$$N = kE_1 \left[\int_{A_1} y dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y dA \right]$$

$$M = \int_{A_1} \sigma_1 . y dA + \int_{A_2} \sigma_2 . y dA = \int_{A_1} E_1 ky . y dA + \int_{A_2} E_2 ky . y dA$$

$$M = kE_1 \left[\int_{A_1} y^2 dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y^2 dA \right]$$

Definiendo $\dfrac{E_2}{E_1} = n$

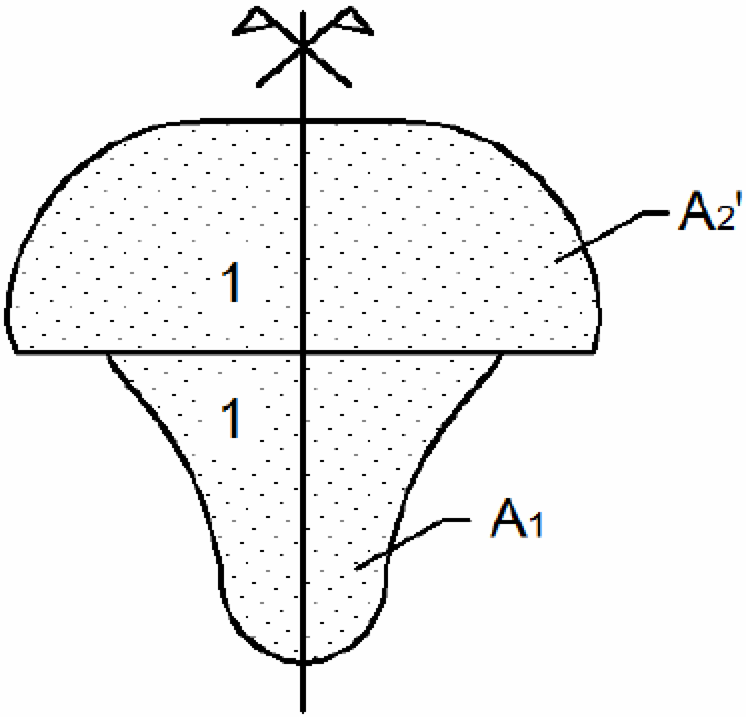
$$N = kE_1\left[\int_{A_1} y\,dA + n\int_{A_2} y\,dA\right]$$

$$M = kE_1\left[\int_{A_1} y^2\,dA + n\int_{A_2} y^2\,dA\right]$$

$$n\int_{A_2} y\,dA = \int_{A_2'} y\,dA \qquad n\int_{A_2} y^2\,dA = \int_{A_2'} y^2\,dA$$

Multiplicando el ancho de la zona 2 por n, el problema original de 2 materiales puede ser sustituido por un problema equivalente con un material solo de módulo E1 y área Igual a A1+A2’, lo que es más sencillo y sabemos resolver.

Sección homogenea equivalente



$$\varepsilon = \varepsilon_G + ky$$

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon = E_1ky + E_1\varepsilon_G$$
$$\sigma_2 = E_2\varepsilon = E_2ky + E_2\varepsilon_G$$

$$N = \int_{A1} \sigma_1 dA + \int_{A2} \sigma_2 dA = \int_{A1} E_1(ky + \varepsilon_G)dA + \int_{A2} E_2(ky + \varepsilon_G)dA$$
$$= kE_1\left[\int_{A1} ydA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} ydA\right] + \varepsilon_G E_1\left[\int_{A1} dA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} dA\right]$$

$$= kE_1\left[\int_{A1} ydA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} ydA\right] + \varepsilon_G E_1\left[\int_{A1} dA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} dA\right]$$

[…]=0 momento de primer orden respecto al baricentro

$$N = \varepsilon_G E_1 A_h$$

Se observa que cuando la N=0 , ε_G vale 0 (deform. en el baricentro)

$$M = \int_{A1} \sigma_1 . ydA + \int_{A2} \sigma_2 . ydA$$

$$= \int_{A1} E_1 (ky + \varepsilon_G) ydA + \int_{A2} E_2 (ky + \varepsilon_G) ydA$$

$$M = kE_1\left[\int_{A1} y^2 dA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} y^2 dA\right] + \varepsilon_G E_1\left[\int_{A1} ydA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} ydA\right]$$

$$M = kE_1 I_h$$

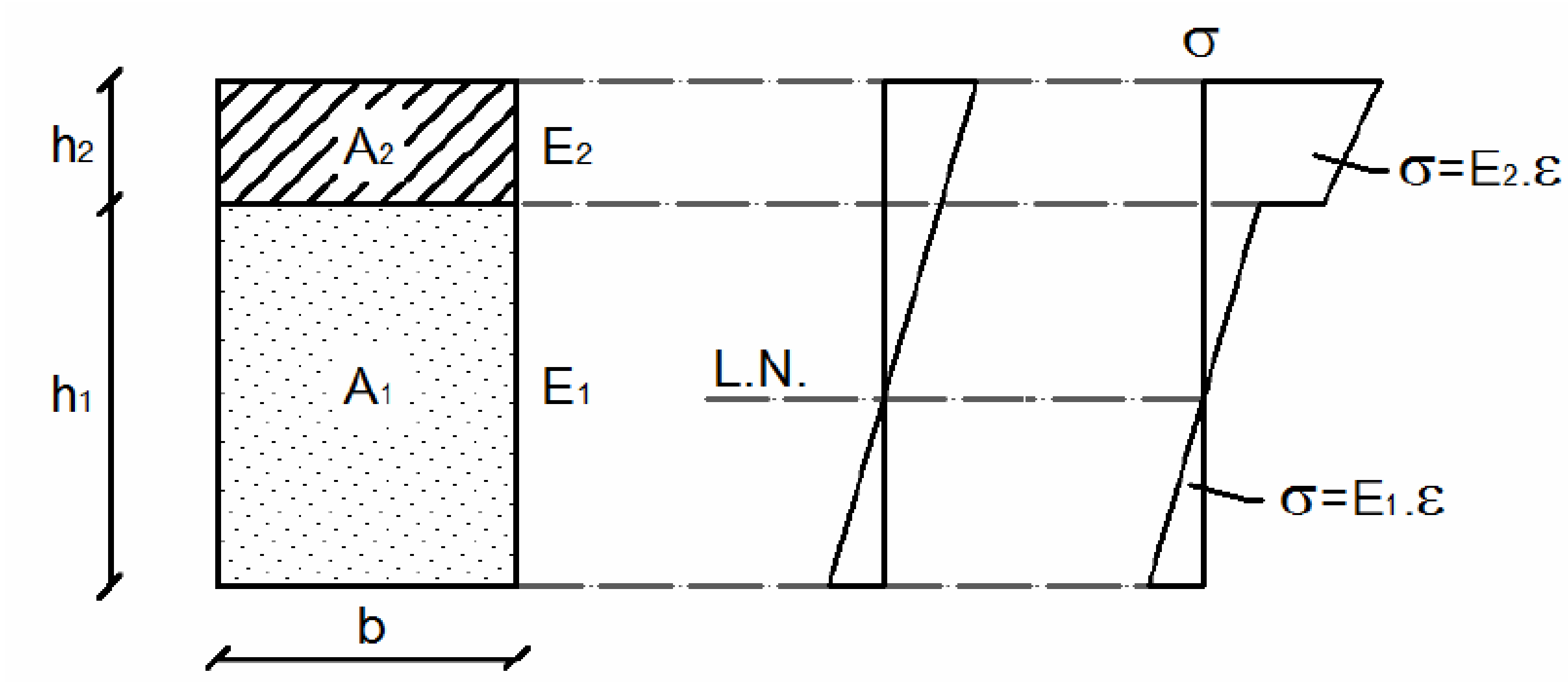
Tensiones Normales

$$M = kE_1 I_h \quad \rightarrow \quad k = \frac{M}{E_1 I_h}$$

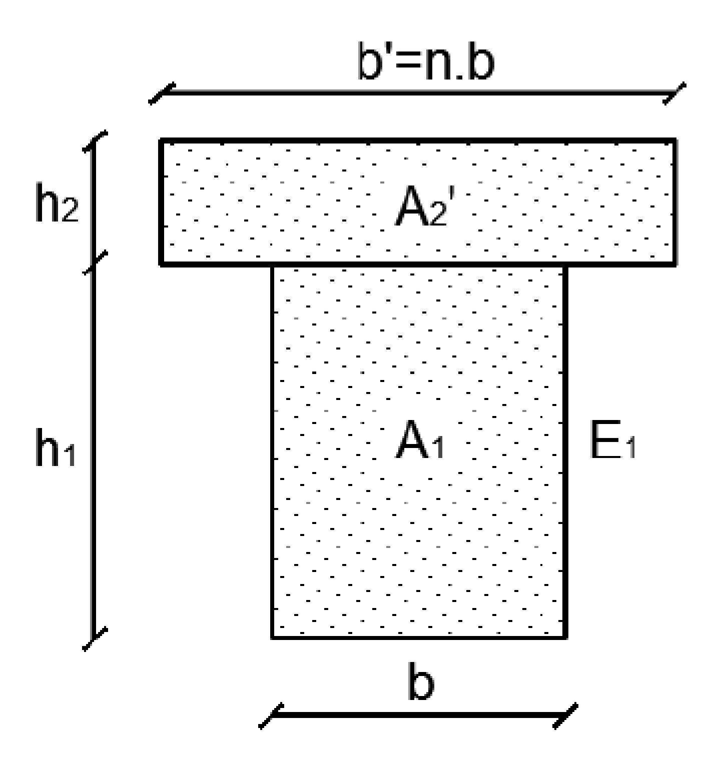
$$\sigma_1(y) = \frac{M.y}{I_h} + E_1 \varepsilon_G = \frac{M.y}{I_h} + \frac{N}{A_h}$$

$$\sigma_2(y) = \frac{E_2}{E_1}\frac{M.y}{I_h} + \frac{E_2}{E_1}E_1 \varepsilon_G = n \cdot \left(\frac{M.y}{I_h} + \frac{N}{A_h}\right)$$

Secciones en bandas horizontales



Sección homogeneizada



Tensiones Rasantes

$$\tau = \frac{V.\mu}{I.b}$$

V es el valor del cortante en la sección en estudio.

μ es el momento de primer orden del tramo de sección que se encuentra por encima de la fibra donde se está hallando la tensión, respecto del baricentro.

I es la inercia de la sección considerada (respecto de su baricentro).

b es el ancho de la sección a la altura de la fibra donde se está hallando la tensión.

$$\tau_h = \frac{V.\mu_h}{I_h.b_h}$$

V es el valor del cortante en la sección en estudio.

μ_h es el momento de primer orden del tramo de sección homogénea que se encuentra por encima de la fibra donde se está hallando la tensión, respecto del baricentro de la sección homogénea.

I_h es la inercia de la sección homogénea (respecto de su baricentro).

b_h es el ancho de la sección homogeneizada a la altura de la fibra donde se está hallando la tensión.

Si estamos en la zona 1: $b_h = b$ y $\tau = \tau_h$

Si estamos en la zona 2 $b_h = nb$ y $\tau = n\tau_h$

Dimensionado

Llamaremos "R" a la fuerza rasante en una longitud s de la viga

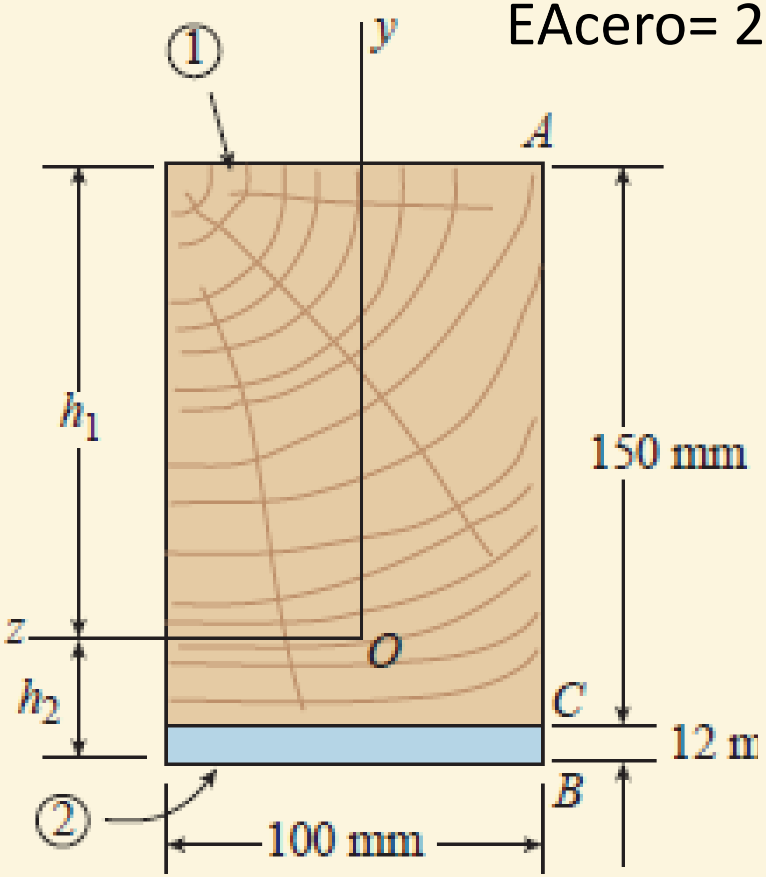
$$R = \tau . b . s = \frac{V . \mu_h}{I_h . b} . b . s \rightarrow R = \frac{V . \mu_h}{I_h} . s$$

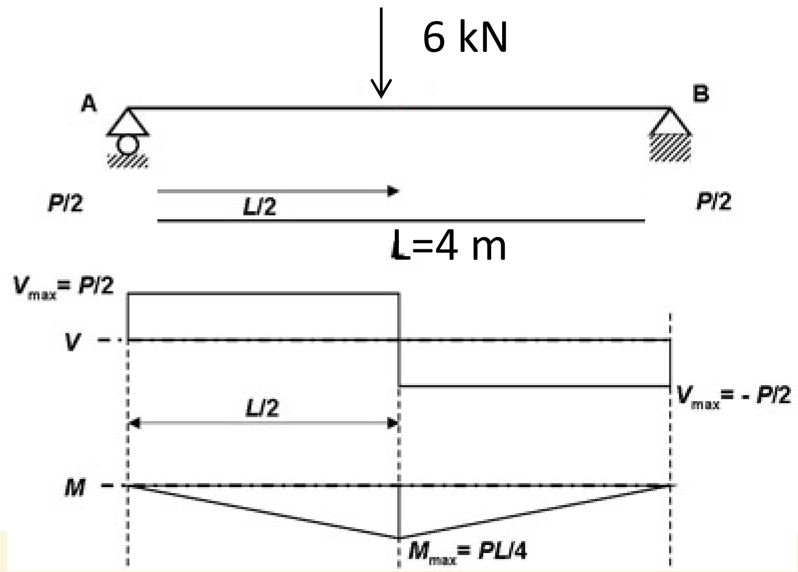
En general nos interesará determinar el valor de la fuerza R en la superficie de contacto entre un material y otro, a los efectos de dimensionar la unión que deberá transmitir dicho esfuerzo entre las partes.

Sección Compuesta

EMadera= 10.5 GPa

EAcero= 210 GPa





$$\int_1 y\,dA = \bar{y}_1 A_1 = (h_1 - 75\text{ mm})(100\text{ mm} \times 150\text{ mm})$$
$$= (h_1 - 75\text{ mm})(15000\text{ mm}^2)$$

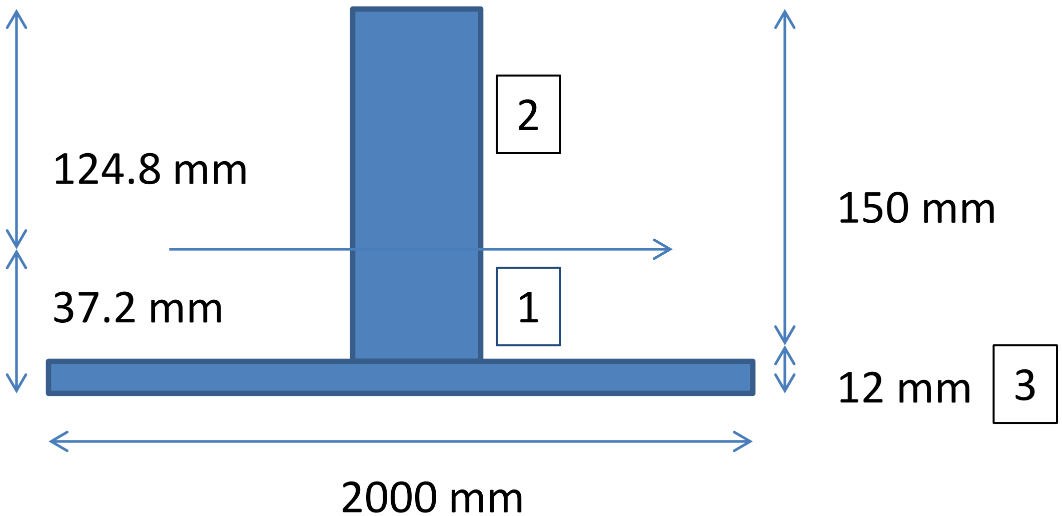
$$\int_2 y\,dA = \bar{y}_2 A_2 = -(156\text{ mm} - h_1)(100\text{ mm} \times 12\text{ mm})$$

$$E_1 \int_1 y\,dA + E_2 \int_2 y\,dA = 0$$

$$h_1 = 124.8\text{ mm}$$

$$h_2 = 162\text{ mm} - h_1 = 37.2\text{ mm}$$

Sección Compuesta

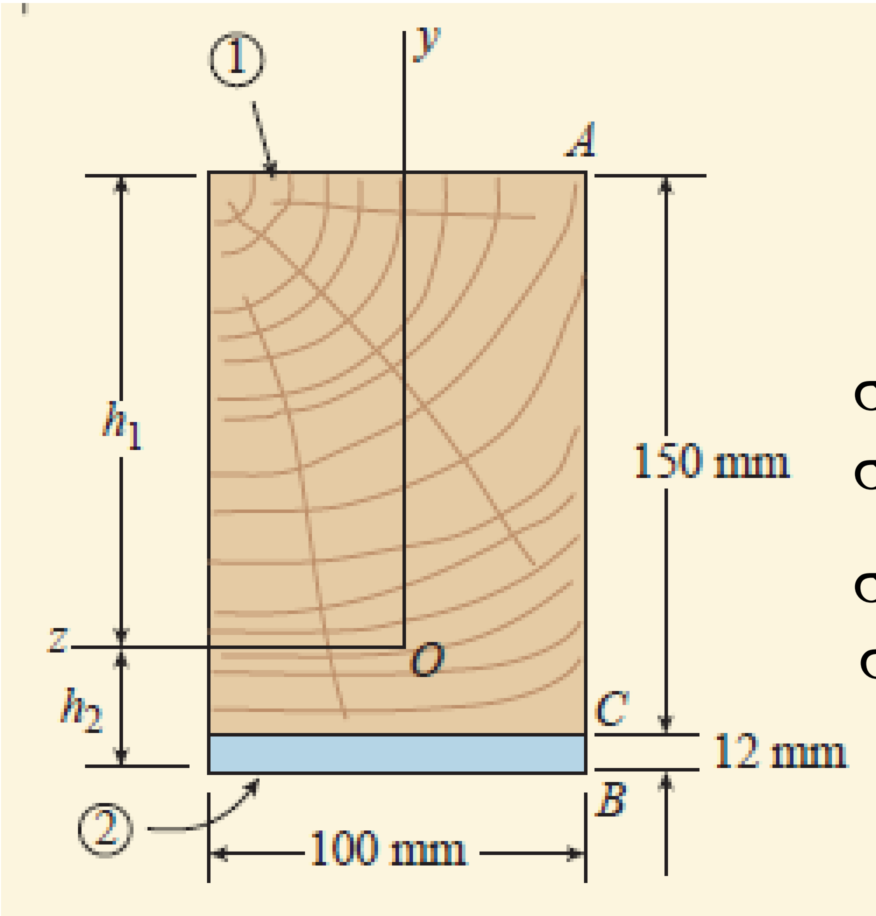


$$I_{homog} = 100*(37.2-12)^3/12 + ((37.2-12)/2)^2*(37.2-12)*100+ \qquad \boxed{1}$$

$$\boxed{3} \qquad (2000*12)(37.2-6)^2 + 2000*12^3/12+$$

$$100*124.8^3/12+(124.8/2)^2*124.8*100 \qquad \boxed{2}$$

Sección Compuesta



$\sigma_A = E_1.\varepsilon$ $k=M/EI$

$\sigma_A = E_1.\varepsilon = E_1.k.y$

$\sigma_A = -\ 10.5GPa.6kN.m.0.1248^*/(E_1 I_{homg})$

$\sigma_A = -\ 8.4\ MPa$

$\sigma_{C1} = 10.5GPa.6kNm0.0252^*/(E_1 I_{homg})$

$\sigma_{C1} = 1.7\ MPa$

$\sigma_{C2} = 210GPa.6kNm0.0252^*/(E_1 I_{homg})$

$\sigma_{C2} = 34\ MPa$

$\sigma_B = 210GPa.\ 6kN.m.0.0372^*/(E_1 I_{homg})$

$\sigma_B = 50.2\ MPa$

Sección Compuesta

$\tau_G = 3$kN. (124.8*100)*124.8/2/(I_{homog}*b)=262 kPa

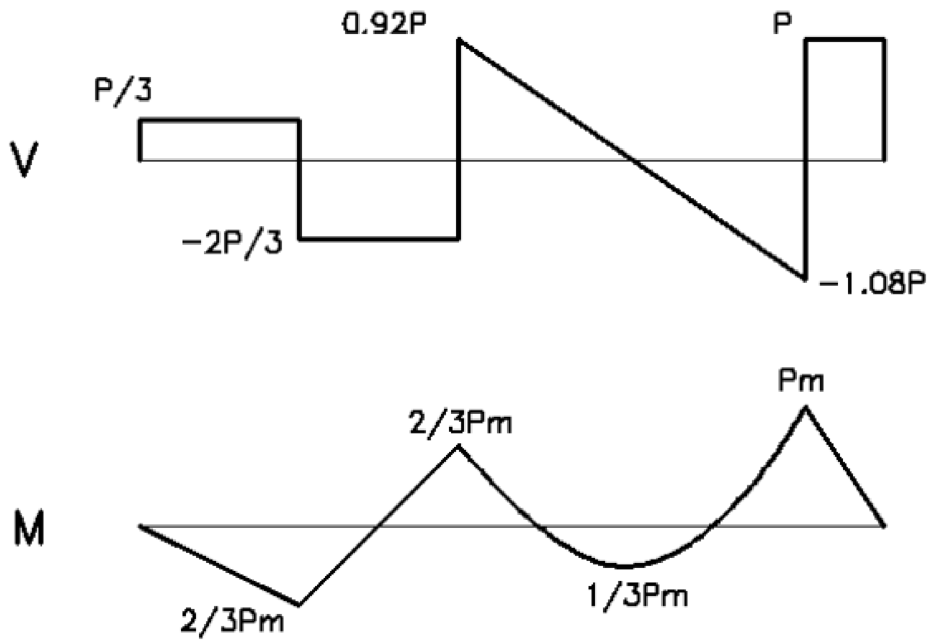
$\tau_{C1} = 3$kN. ((124.8*100)*124.8/2)-

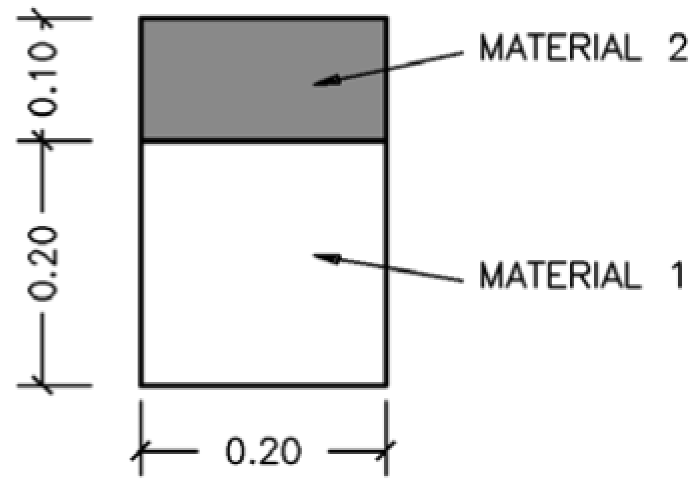
(25.2*100)*25.2/2)/(I_{homog}*b)=252 kPa

$\tau_{C2} = 3$kN. ((2000*12)*(25.2+6)/(I_{homog}*b_h)= 12.6 kPa

$\tau_{C2} = 20$. 12.6 kPa = 252 kPa

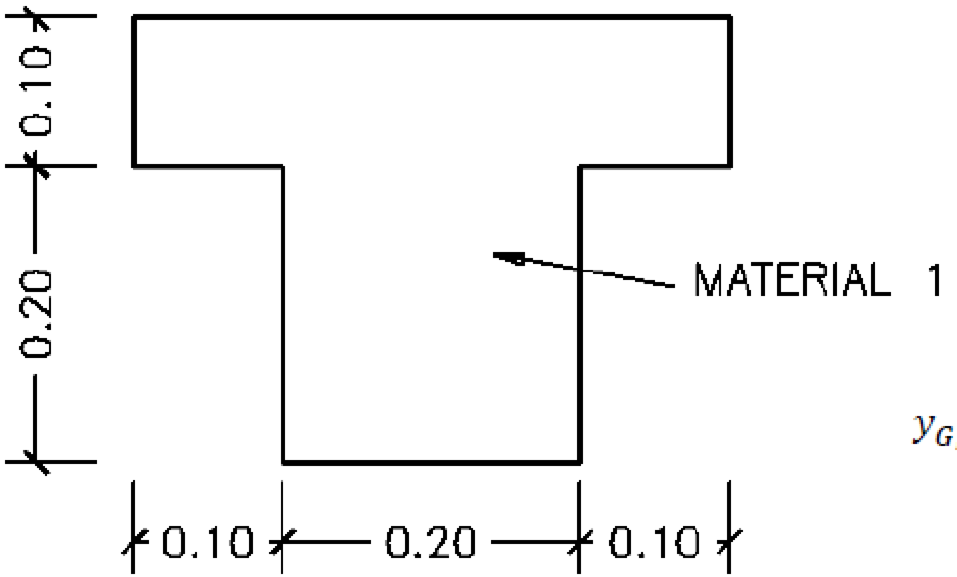
Ejemplo Curso RII (*Ing. Adrián Russi* *Ing. María Laura Reboredo*)





- $E_2/E_1=2$
- P=20 kN
- Tensiones admisibles: $\sigma_{adm,1}$ = 6 MPa y $\sigma_{adm,2}$ = 9 MPa
- Aplastamiento: σ_{adm}^{aplast} (mat.1) = 10 MPa y σ_{adm}^{aplast} (mat. 2) = 15 MPa.

Sección Homogeneizada



$$y_{G,hom} = \frac{20^2 \cdot 10 + 40 \cdot 10 \cdot 25}{20^2 + 40 \cdot 10} = 17.5\ cm$$

$$I_{x,hom} = \frac{20^4}{12} + 20^2 \cdot (10 - 17.5)^2 + \frac{40 \cdot 10^3}{12} + 40 \cdot 10 \cdot (25 - 17.5)^2 = 61666.7\ cm^4$$

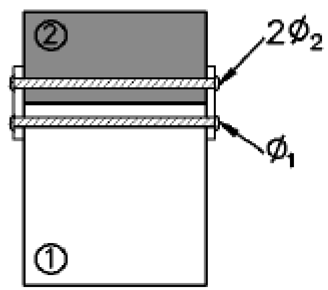
Conectores

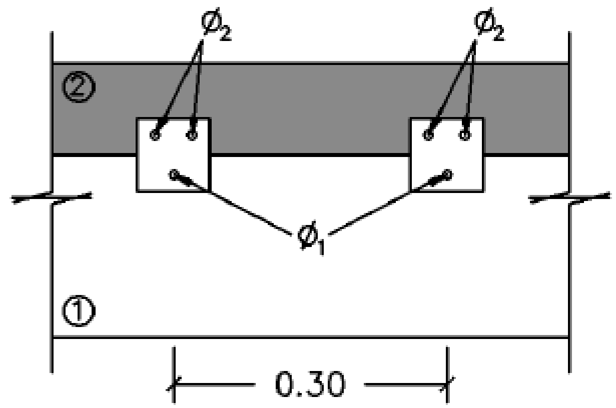
$$\tau \cdot b = \frac{V \cdot \mu_{hom}(\text{unión})}{I_{x,hom}}$$

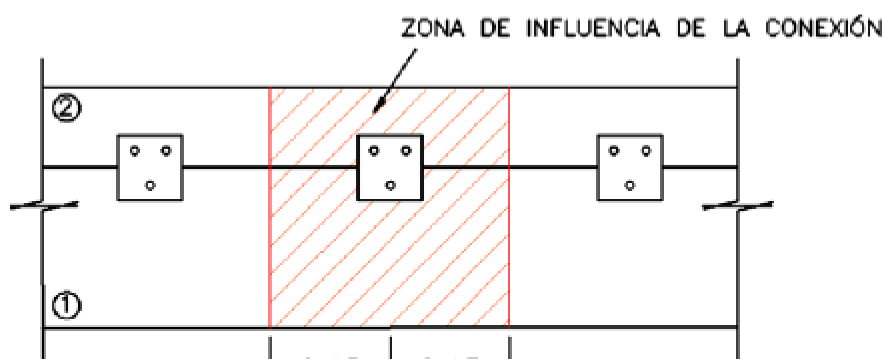
$$\mu_{hom}(\text{unión}) = 40 \cdot 10 \cdot (25 - 17.5) = 3000\ cm^3$$
$$I_{x,hom} = 61667\ cm^4$$
$$V = 1.08 \cdot P = 21.6\ kN$$

$$\tau \cdot b = \frac{21.6 \cdot 3000}{61667} = 1.05 \frac{kN}{cm}$$

Conectores





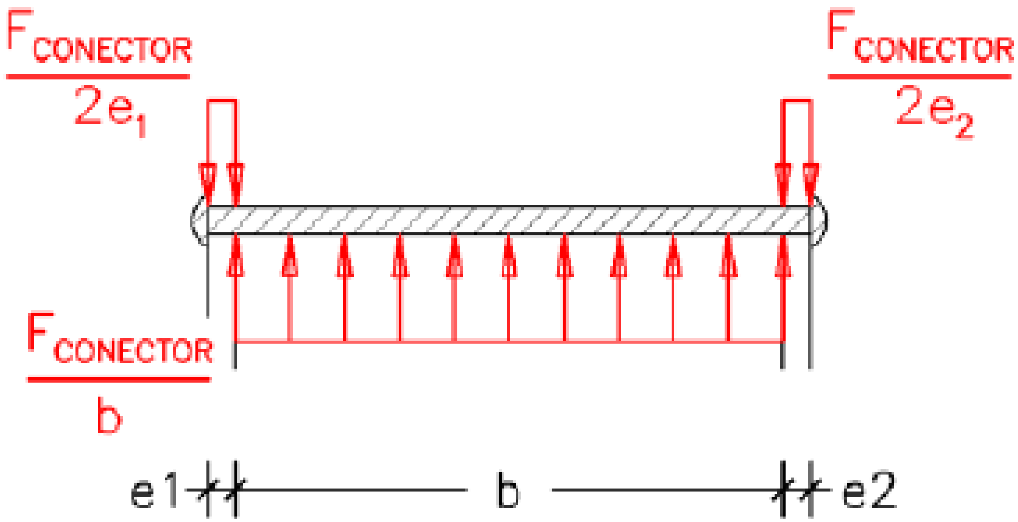


$$F_{conexión} = \tau \cdot b \cdot s = 1.05 \frac{kN}{cm} \cdot 30\ cm = 31.5\ kN$$

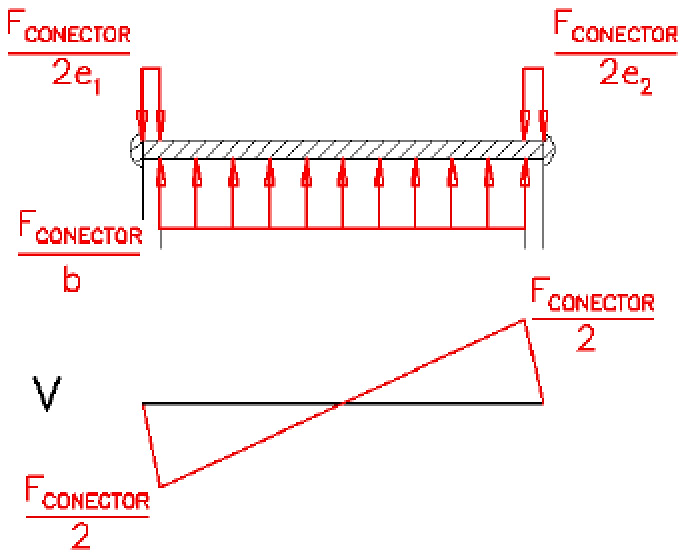
Conectores

$$F_{conectores\ sup} = \frac{F_{conexión}}{2} = \frac{31.5\ kN}{2} = 15.75\ kN$$

$$F_{conectores\ inf} = \frac{F_{conexión}}{1} = \frac{31.5\ kN}{1} = 31.5\ kN$$



Conectores



resistencia admisible al corte $(\tau_{adm} = 70\ MPa)$

$$V_{conector}^{máx}\ (\text{corte doble}) = \frac{F_{conector}}{2}$$

Tenemos que:

$$\tau_{conector\ sup}^{máx} = \frac{V_{conector\ sup}^{máx}}{A_{conector\ sup}} = \frac{\frac{15.75\ kN}{2}}{\pi \cdot {\emptyset_2}^2/4} \leq \tau_{adm} = 7\frac{kN}{cm^2} \ \rightarrow\ \boldsymbol{\emptyset_2 \geq 1.20\ cm}$$

$$\tau_{conector\ inf}^{máx} = \frac{V_{conector\ inf}^{máx}}{A_{conector\ inf}} = \frac{\frac{31.5\ kN}{2}}{\pi \cdot {\emptyset_1}^2/4} \leq \tau_{adm} = 7\frac{kN}{cm^2} \ \rightarrow\ \boldsymbol{\emptyset_1 \geq 1.69\ cm}$$

Aplastamiento del Material

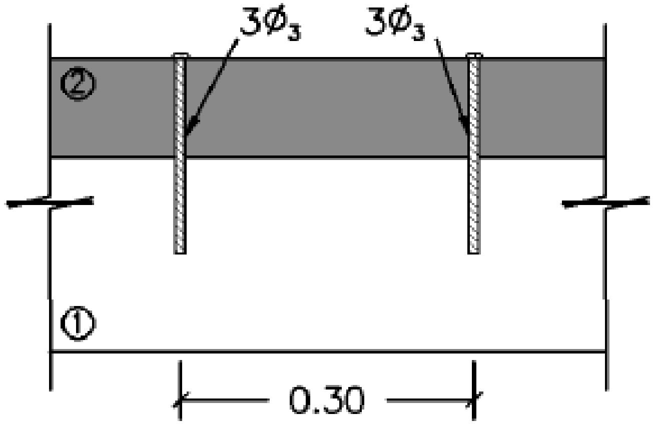
$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conector}}{\emptyset \cdot l}$$

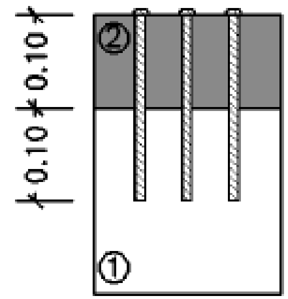
El material 2 está en contacto con los conectores superiores:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores\,sup}}{\emptyset_2 \cdot l} = \frac{15.75\ kN}{\emptyset_2 \cdot 20\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.50\frac{kN}{cm^2} \ \rightarrow \ \emptyset_2 \geq \mathbf{0.53\ cm}$$

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores\,inf}}{\emptyset_1 \cdot l} = \frac{31.5\ kN}{\emptyset_1 \cdot 20\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.00\frac{kN}{cm^2} \ \rightarrow \ \emptyset_1 \geq \mathbf{1.58\ cm}$$

Conectores



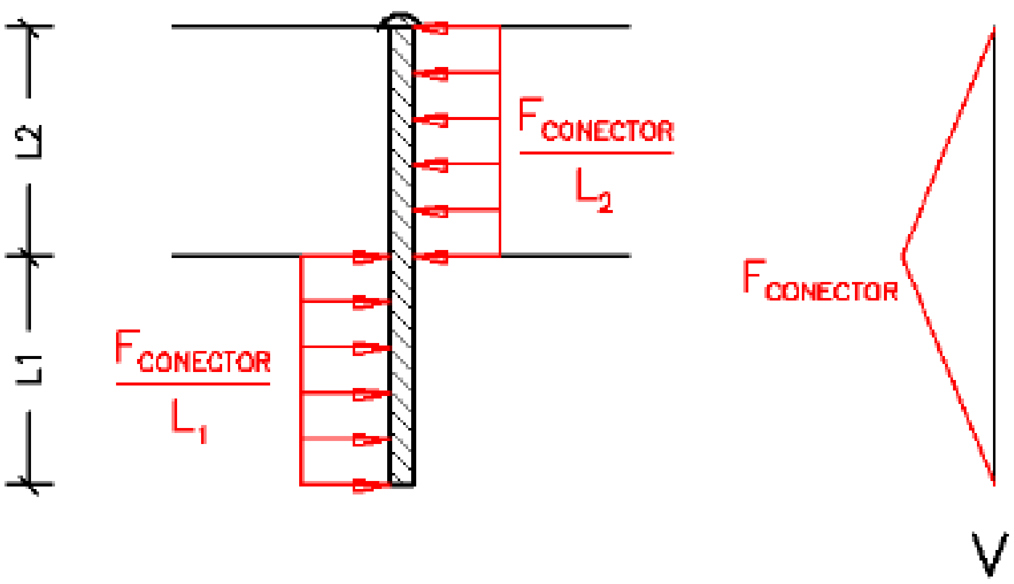


$$\tau \cdot b = \frac{21.6 \cdot 3000}{61667} = 1.05\frac{kN}{cm}$$

$$F_{conexión} = \tau \cdot b \cdot s = 1.05\frac{kN}{cm} \cdot 30\ cm = 31.5\ kN$$

Conectores

$$F_{conector} = \frac{F_{conexión}}{3} = \frac{31.5\ kN}{3} = 10.5\ kN$$



$$V_{conector}^{máx}\ (\text{corte simple}) = F_{conector}$$

Conectores

$$\tau_{conector} = \frac{V_{conector}}{A_{conector}}$$

$$\tau_{conector}^{máx} = \frac{V_{conector}^{máx}}{A_{conector}} = \frac{10.5\ kN}{\pi \cdot {\emptyset_3}^2 / 4} \leq \tau_{adm} = 7\,\frac{kN}{cm^2} \;\; \rightarrow \;\; \emptyset_3 \geq \mathbf{1.38\ cm}$$

En el material 2:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores}}{\emptyset_3 \cdot l} = \frac{10.5\ kN}{\emptyset_3 \cdot 10\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.50\,\frac{kN}{cm^2} \;\; \rightarrow \;\; \emptyset_3 \geq \mathbf{0.70\ cm}$$

En el material 1:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores}}{\emptyset_3 \cdot l} = \frac{10.5\ kN}{\emptyset_3 \cdot 10\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.00\,\frac{kN}{cm^2} \;\; \rightarrow \;\; \emptyset_3 \geq \mathbf{1.05\ cm}$$

Tensiones Normales

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon = E_1 k y = E_1 \frac{M}{E_1 \cdot I_{hom}} y = \frac{2000}{61666.7} y = 0.0324y$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon = E_2 k y = E_2 \frac{M}{E_1 \cdot I_{hom}} y = 2\frac{2000}{61666.7} y = 0.0649y$$

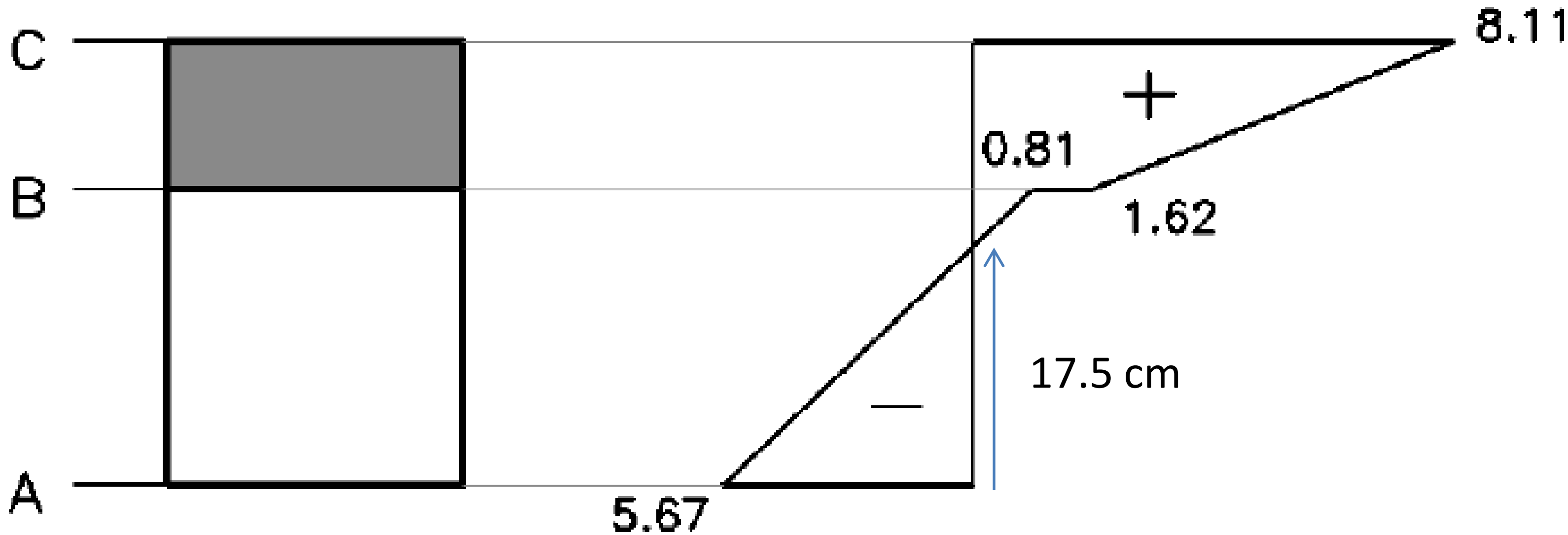
$$\sigma_1\,(A) = \ 0.0324 \cdot 17.5 = 0.567 \frac{kN}{cm^2} = 5.67\ MPa < 6\ MPa$$

$$\sigma_1\,(B) = \ 0.0324 \cdot 2.5 = 0.081 \frac{kN}{cm^2} = 0.81\ MPa < 6\ MPa$$

$$\sigma_2\,(B) = \ 0.0649 \cdot 2.5 = 0.162 \frac{kN}{cm^2} = 1.62\ MPa < 9\ MPa$$

$$\sigma_2\,(C) = \ 0.0649 \cdot 12.5 = 0.811 \frac{kN}{cm^2} = 8.11\ MPa < 9\ MPa$$

Tensiones Normales



$$\sigma_1\,(A) = \ 0.0324 \cdot 17.5 = 0.567\,\frac{kN}{cm^2} = 5.67\,MPa < 6\,MPa$$

$$\sigma_1\,(B) = \ 0.0324 \cdot 2.5 = 0.081\,\frac{kN}{cm^2} = 0.81\,MPa < 6\,MPa$$

$$\sigma_2\,(B) = \ 0.0649 \cdot 2.5 = 0.162\,\frac{kN}{cm^2} = 1.62\,MPa < 9\,MPa$$

$$\sigma_2\,(C) = \ 0.0649 \cdot 12.5 = 0.811\,\frac{kN}{cm^2} = 8.11\,MPa < 9\,MPa$$