Obligatorio Combinatoria Analítica Rep. 2

Damián Ferencz

22 de Mayo de 2019

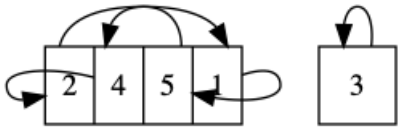
Ejercicio 28:

Parte 1:
Veamos como podemos, con las construcciones que tenemos disponibles, especificar el conjunto de pares de permutaciones del mismo largo $\mathcal{P}^2$, donde, el peso está determinado por el largo de las permutaciones.
Lo primero que podemos hacer es pensar la primera permutacion con la estructura usual de una lista etiquetada, y la segunda como punteros entre las posiciones de la lista.
Podemos establecer la especificacion recursiva:

$$\mathcal{P}^2 = \{\epsilon\} + \mathcal{Z} \star (\mathcal{P}^2 + \Theta\mathcal{P}^2)$$

,
Veamos como se puede construir cualquier lista etiquetada con punteros de tamaño n:

- $\{\epsilon\}$ es el caso de la lista con un elemento y cuya posición se apunta a sí misma (corresponde al caso del par de permutaciones triviales con un elemento).
- $\mathcal{Z} \star \mathcal{P}^2$ corresponde a agregar un nuevo elemento con etiqueta que se apunta a si misma (y por lo tanto, la segunda permutacion tiene a n fijo)
- $\mathcal{Z} \star \Theta\mathcal{P}^2$ con posición distinguida p corresponde a agregar un nuevo elemento con etiqueta que apunta a la posición p, cambiando el viejo puntero a p para la posición n (y por lo tanto, la segunda permutacion manda p a n).



En el ejemplo de la figura, al agregar el nodo de la derecha, con etiqueta 3, podemos optar por la construcción $\mathcal{Z} \star \mathcal{P}^2$ y obtenemos el par de permutaciones $(\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&3&5\end{smallmatrix}\right))$. En cambio, si optamos por la construcción $\mathcal{Z} \star \Theta\mathcal{P}^2$ y elegimos la posición distinguida 4, el par de permutaciones quedaría $(\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{smallmatrix}\right))$.

Si llamamos $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} z^n$ a la FGE de P^2, se tiene

$$p(z) = 1 + z(p(z) + zp'(z))$$

Aplicando $[z^{n+1}]$ a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{p_n}{n!} + \frac{np_n}{n!}$$

Es decir,

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)p_n}{n!} = \frac{(n+1)!p_n}{n!^2}$$

Luego,

$$p_{n+1} = \frac{(n+1)!^2}{n!^2}p_n$$

Como $p_0 = 1$, deducimos $p_n = n!^2$, como hubieramos previsto.

Parte 2:

Sean $\Gamma = \{\Gamma_{\sigma\tau} : (\sigma, \tau) \in \mathcal{P}^2\}$ [1] y $\Gamma^C = \{\Gamma_{\sigma\tau} \text{ conexo } : (\sigma, \tau) \in \mathcal{P}^2\}$.
Cada grafo de Γ puede entenderse como el conjunto formado por sus componentes conexas, luego se tiene la especificación $\Gamma = \textsc{Set}(\Gamma^C)$. Es claro que $\Gamma \cong \mathcal{P}^2$, luego la FGE de Γ es $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^2 z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ y la de Γ^C es $\log(g(z))$.

Por definición de probabilidad en espacios finitos, se tiene:

$$\pi_n = P(\{(\sigma, \tau) \in \mathcal{P}_n^2 : \Gamma_{\sigma\tau} \in \Gamma^C\}) = \frac{n![z^n]\ \log(g(z))}{n![z^n]g(z)} = \frac{[z^n]\ \log(g(z))}{n!}$$

Parte 3:

Nos disponemos a probar $n!^2\pi_n = (n-1)!I_n$, o, equivalentemente, que $(n-1)!I_n = n!\log(g(z)) = \Gamma_n^C$. Llamemos $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión que cuenta Γ_n^C y $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la correspondiente a $\mathcal{I}$.

Recordemos que la clase $\mathcal{I}$ se define implícitamente con la ecuación $\mathcal{P} = \textsc{Seq}(\mathcal{I})$. Ahora, desarrollando un paso la definición de Seq, esto es lo mismo que escribir:

$$\mathcal{P} = \{\epsilon\} + \mathcal{I} \times \mathcal{P}$$

Dicha especificación se traduce en una equación de FGOs:

$$\sum_{k=0}^{\infty} n! z^n = 1 + (\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k)(\sum_{k=1}^{\infty} i_k z^k)$$

Luego, si $n \geq 1$, al aplicar $[z^n]$ obtenemos $n! = \sum_{k=0}^{n} i_k (n-k)!$. Entonces, podemos afirmar que la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ queda determinada por

$$\begin{cases} i_0 = 0 \\ i_n = n! - \sum_{k=1}^{n-1} i_k (n-k)! \end{cases}$$

[1] Estamos asumiendo que las aristas se etiquetan con la permutación a la que corresponden. Luego $\Gamma_{\sigma\tau} \neq \Gamma_{\tau\sigma}$. Además, las aristas son dirigidas

Esta recurrencia, que se desprende de la especificación que recién mostramos para $\mathcal{P}$, resulta de entender cualquier permutación indescomponible de largo n como unión de dos permutaciones $P(1) \cup P'$ siendo $P(1)$ la permutacion indescomponible más pequeña que contiene al 1 y P' la permutación restante.

Inspirado por ésta recurrencia, y notando A_k^n a los arreglos de n en k, observamos que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ queda determinada por la siguiente:

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0 \\ \gamma_n = (n!)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k A_{n-k}^{n-1}(n-k)! \end{cases}$$

Ésta recurrencia también proviene de una especificación, pero es un poco engorrosa así que prefiero relatarla: Cualquier grafo $\Gamma_{\sigma\tau}$ disconexo puede verse como una unión no trivial $\Gamma_{\sigma\tau}(1) \cup \Gamma'_{\sigma\tau}$, donde $\Gamma_{\sigma\tau}(1)$ es la componente conexa que contiene al vértice con etiqueta 1 y $\Gamma'_{\sigma\tau}$ el grafo con los vértices restantes, sin restricciones. Ahora bien, si $|\Gamma_{\sigma\tau}(1)| = k$, tenemos A_{n-k}^{n-1} formas de elegir las etiquetas de $\Gamma'_{\sigma\tau}$ y a la vez una de las permutaciones en dicho grafo. Luego de ésto, tenemos $(n-k)!$ formas de elegir la otra permutación en $\Gamma'_{\sigma\tau}$. Por último observemos que las $n-1$ etiquetas utilizadas en $\Gamma_{\sigma\tau}(1)$ quedaron determinadas y hay γ_k formas de elegir $\Gamma_{\sigma\tau}(1)$.

Finalmente, veamos por inducción que $(k-1)!i_{k+1} = \gamma_k \; \forall k \geq 1$. Para eso, supongamos que vale para todo $k \leq n$, con $n \geq 2$.[2]. Veamos que vale para n:

El lado derecho de la recurrencia para γ_n se puede escribir en términos de los i_k y esta claro que habremos terminado si probamos $(n-1)!i_{n+1} = (n!)^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!i_{k+1}A_{n-k}^{n-1}(n-k)!$

Pero ésto último es igual a $(n!)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} i_{k+1}(n-1)!(n-k)! = (n!)^2 - \sum_{k=2}^{n} i_k(n-1)!(n-k+1)!$. Así que basta ver que

$$i_{n+1} = n!n - \sum_{k=2}^{n} i_k(n-k+1)!$$

Pero esto se cumple sencillamente porque $i_{n+1} = (n+1)! - \sum_{k=1}^{n} i_k(n-k+1)! = (n!n + n!) - \sum_{k=2}^{n} i_k(n-k+1)! - n! = n!n - \sum_{k=2}^{n} i_k(n-k+1)!$

[2]El caso base se cumple trivialmente pues $0!i_2 = \gamma_1 = 1$

Ejercicio 11:

Resulta claro que $\cosh(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} z^{2i} =$, es decir, la FGE de $\textsc{Set}_{\dot{2}}(\mathcal{Z})$, la clase etiquetada de los conjuntos con una cantidad par de elementos. Análogamente, $\sinh(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} z^{2i+1}$, luego es la FGE de $\textsc{Set}_{\dot{2}+1}(\mathcal{Z})$.

$\cosh(z)^N$ es la FGE de $\textsc{Seq}_N(\textsc{Set}_{\dot{2}}(\mathcal{Z}))$, y asociando a cada conjunto la posición donde se encuentra en la secuencia, podemos ver que es una especificación para
$\mathcal{MP}_N = \{f : \{1,..,k\} \to \{1,..,N\} : k \in \mathbb{N} \text{ y } |f^{-1}(n)| \text{ es par } \forall n \in \mathbb{N}\}$. Es análogo ver que $\sinh(z)^N$ es la FGE de $\textsc{Seq}_N(\textsc{Set}_{\dot{2}+1})$, y que ésta es una especificación para $\mathcal{MI}_N$[3].

Observemos que cada $f \in \{1,..,N\}^{\{1,..,k\}}$ puede ser entendida como una evolución de configuraciones de cámaras en k tiempos discretos, si pensamos a $\{1,..,N\}$ como el conjunto de pelotas, y $f^{-1}(n)$ como todos los tiempos donde la pelota n cambia de cámara. Estamos asumiendo, como dice la letra, que todas las pelotas comienzan en la cámara A, por lo que la repartición de las pelotas en cada momento queda determinada por la series de cambios discretos. Luego, $\mathcal{MP}_N$ corresponde al conjunto de evoluciones donde todas las pelotas terminan en la cámara A, y $\mathcal{MI}_N$ las evoluciones que dejan llena la cámara B.

Cada elemento de $\textsc{Seq}_\ell(\textsc{Set}_{\dot{2}}(\mathcal{Z})) \star \textsc{Seq}_{N-\ell}(\textsc{Set}_{\dot{2}+1}(\mathcal{Z}))$ con tamaño k puede ser pensado como una cuaterna (f, g, A, B), con $(f, g) \in \mathcal{MP}_l \times \mathcal{MI}_{N-\ell}$ y (A, B) partición de $\{1,..,k\}$. Sea $(n_1,..,n_r)$ la ordenación de A y $(m_1,..,m_{k-r})$ la ordenación de B. Podemos pensar nuestra cuaterna como la evolución de configuraciones que en tiempos n_i cambia de cámara la pelota $f(i)$ y que en tiempos m_i cambia de cámara la pelota $g(i) + \ell$. Es decir, logramos establecer una correspondencia entre $\textsc{Seq}_\ell(\textsc{Set}_{\dot{2}}(\mathcal{Z})) \star \textsc{Seq}_{N-\ell}(\textsc{Set}_{\dot{2}+1}(\mathcal{Z}))$ y las evoluciones donde las primeras l pelotas terminan en A y las restantes en B. La generatriz de dichas evoluciones es por lo tanto $(\cosh z)^\ell (\sinh z)^{N-\ell}$.

Para obtener $E_n^{[\ell]}$ basta tomar cualquier cuaterna (f, g, A, B) y considerar todas las quíntuplas (f, g, A, B, K), donde $K \subseteq \{1,..,N\}$ con $|K| = \ell$ representa el conjunto de pelotas que terminan en A (las restantes son las que terminan en B). Es decir, si $\{\alpha_1,..,\alpha_\ell\}$ es la ordenación de K y $\{\beta_{\ell+1},..,\beta_N\}$ la ordenación de $\{1,..,N\} - K$, la evolución queda determinada por la función de cambios:

$$h(x) = \begin{cases} \alpha_{f(i)} \text{ si } x = n_i \\ \beta_{g(i)+\ell} \text{ si } x = m_i \end{cases}$$

Luego la generatriz de $E_n^{[\ell]}$ es $\binom{N}{\ell}(\cosh z)^\ell (\sinh z)^{N-\ell}$.

[3] La misma definición de $\mathcal{MP}_n$ pero cambiando por $|f^{-1}(n)|$ impar

Ejercicio 15:

La estrategia que proponemos para los prisioneros es la siguiente:

> El prisionero i, al llegar a la cabina, elige dar vuelta la carta que está guardada en la gaveta i. A partir de ahí, siempre decide abrir la gaveta asociada al número indicado en la carta que recién dio vuelta. Continua hasta abrir cincuenta gavetas o encontrar su propia carta.

Ahora, nos disponemos a probar que con ésta estrategia, la probabilidad deque los 100 prisioneros hallen su carta excede 0.30 -suponiendo que la elección de la permutación asociada a la distribución de cartas es aleatoria-.

Consideremos $\sigma \in \mathcal{P}_{100}$ la permutación asociada a la distribución de cartas en gavetas.

La primera observación es que al abrir las gavetas utilizando la estrategia descrita, el prisionero i abre exactamente las cartras $\{\sigma^k(i) : k \in \{1, .., 50\}\}$, es decir, los primero 50 elementos del ciclo de i asociado a σ, que notamos $\langle i \rangle_\sigma$. Entonces, podemos afirmar lo siguiente:

> La estrategia propuesta será exitosa para la distribución asociada a σ si y solo si todos los ciclos que conforman σ tienen a lo sumo 50 elementos.

Es claro que $\{\sigma \in \mathcal{P} : \sigma$ tiene algún ciclo de tamaño mayor a $50\}$ puede identificarse con la clase combinatoria etiquetada $\mathcal{P}' = \textsc{Cyc}_{>50}(\mathcal{Z}) \star \mathcal{P}$. Por lo tanto, la probabilidad de éxito de la estrategia es es $1 - \frac{|\mathcal{P}'_{100}|}{|\mathcal{P}_{100}|}$

Como $\textsc{Cyc}_{>50}$ tiene generatriz exponencial $\sum_{k=51}^{\infty}(k-1)!z^k$ y $\mathcal{P}$ tiene generatriz exponencial $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $|\mathcal{P}'_{100}| = \sum_{k=51}^{100} \binom{100}{k}(k-1)!(100-k)! = \sum_{k=51}^{100} \frac{n!}{k}$. Luego, contamos $1 - \frac{\sum_{k=51}^{100} \frac{n!}{k}}{n!} = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \approx 0.312$.

Como algo anecdótico, simulé en Python en el orden de 100000 corridas de la situación, aplicando la estrategia. El número de éxitos es significativamente mayor al teórico -0.334-, lo que muestra las limitaciones del algoritmo de generación pseudo-aleatoria de permutaciones utilizado

Codigo de Simulación Ejercicio 15:

```
from numpy.random import permutation
success = 0
for j in range(10000):
    k = 0
    box = permutation([i for i in range(100)])
    while k < 3:
        count = 0
        current = k
        found = False
        while count < 50:
            if box[current] == k:
                found = True
                break
            current = box[current]
            count = count + 1
        if not found:
            break
        if k == 2:
            success = success + 1
        k = k + 1
print(success)
```