# Obligatorio 2, Combinatoria Analítica

Juan Pablo Martínez

10 de Junio de 2019

## 1 Ejercicio 29.

En este ejercicio, se pide darle una interpretación combinatoria a la siguiente igualdad utilizada en integración por partes:
$\int_0^z A'(t) \cdot B(t)dt + \int_0^z A(t) \cdot B'(t)dt = A(t) \cdot B(t)$

Primero escribiremos la igualdad con otra notación:
$\int_0^z (\frac{d}{dt}A(t)) \cdot B(t)dt + \int_0^z A(t) \cdot (\frac{d}{dt}B(t))dt = A(t) \cdot B(t)$

Sean $A$ y $B$ clases combinatorias, $A(z)$ y $B(z)$ sus respectivas EGF, sabemos que la generatriz de $A \star B$ es igual a $A(z) \cdot B(z)$, que la generatriz de $A^{\square} \star B$ es $\int_0^z (\frac{d}{dt}A(t)) \cdot B(t)dt$ y que la generatriz de $A \star B^{\square}$ es $\int_0^z A(t) \cdot (\frac{d}{dt}B(t))dt$

Por lo tanto, la igualdad utilizada en integración por partes es equivalente a decir que $A \star B = A^{\square} \star B + A \star B^{\square}$.

Esto es en realidad bastante intuitivo, sea c de largo n donde $c \in A \star B$, puedo escribir $c = (a, b)$ donde $a \in A$ de largo n-k y $b \in B$ de largo k (con $k \in N \wedge k \leq n$) reetiquetados, donde la mínima etiqueta se encuentra en a ($c \in A^{\square} \star B$) o la mínima etiqueta se encuentra en b ($c \in A \star B^{\square}$)

## 2 Ejercicio 30.

En este ejercicio se pide demostrar tres propiedades:

1) Sea $A = B^{\square} \star C^{\blacksquare}$, entonces $\partial_z^2 A(z) = (\partial_z B(z)) \cdot (\partial_z C(z))$

2) Sea $A = B^{\square\blacksquare} \star C$, entonces $\partial_z^2 A(z) = (\partial_z^2 B(z)) \cdot C(z)$

3) Sea $A = B^{\square} \star C^{\boxdot} \star D^{\blacksquare}$, entonces $\partial_z^3 A(z) = (\partial_z B(z)) \cdot (\partial_z C(z)) \cdot (\partial_z D(z))$

Donde $\partial_z = \dfrac{d}{dz}$ y los símbolos $\square$ $\boxdot$ $\blacksquare$ representan menor, segunda menor, y mayor etiquetas, respectivamente.

En primer lugar, recordemos que si A y B son clases combinatorias entonces

$$A_n = n \cdot B_n \implies A(z) = z \cdot \frac{d}{dz} B(z) \tag{1}$$

Utilizaremos lo anterior para demostrar de forma inductiva que

$$A_n = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot B_n \implies A(z) = z^k \cdot \frac{d^k}{dz} B(z) \tag{2}$$

*Proof.* El paso base es (1), aquí probaremos el paso inductivo.

Sea $A_n = \dfrac{n!}{(n-k)!} \cdot B_n$, podemos realizar el siguiente cambio de variable: $I_n = \dfrac{(n-1)!}{(n-k)!} \cdot B_n$, de donde obtenemos $A_n = n \cdot I_n$. Y, utilizando (1), nos queda $A(z) = z \cdot \dfrac{d}{dz} I(z)$

Observemos $I_n$, sabemos que $I_n = \dfrac{(n-1)!}{(n-k)!} \cdot B_n$, lo que es equivalente a $I_n = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!} \cdot B_n$. Definiendo $I_n^{+1} = I_{n+1}$ y $B_n^{+1} = B_{n+1}$ obtenemos $I_{n-1}^{+1} = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!} \cdot B_{n-1}^{+1}$ y por hipótesis inductiva podemos concluir que $I^{+1}(z) = z^{k-1} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz} B^{+1}(z)$.

Se puede comprobar fácilmente que $I^{+1}(z) = \frac{d}{dz} I(z)$ y que $B^{+1}(z) = \frac{d}{dz} B(z)$

Recordemos que $A(z) = z \cdot \dfrac{d}{dz} I(z)$, sustituyendo tenemos que $A(z) = z \cdot I^{+1}(z) = z \cdot (z^{k-1} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz} B^{+1}(z)) = z^k \cdot \frac{d^{k-1}}{dz} B^{+1}(z) = z^k \cdot \frac{d^{k-1}}{dz} (\frac{d}{dz} B(z)) = z^k \cdot \dfrac{d^k}{dz} B(z)$ $\square$

Demostremos entonces la propiedad 1). $A_n$ puede ser escrito a partir de $B_n$ y $C_n$ de la siguiente manera: $A_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-1} \cdot B_k \cdot C_{n-k}$. Debido a que tenemos n - 2 etiquetas para repartir (la mínima y la máxima ya están definidas), k - 1 etiquetas para la componente de B, y el resto para la componente de C.

Además, operando sobre $\binom{n-2}{k-1}$ obtenemos la siguiente igualdad: $\binom{n-2}{k-1} = \dfrac{(n-2)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} = \dfrac{n! \cdot k \cdot (n-k)}{n \cdot (n-1) \cdot k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot \dfrac{k \cdot (n-k)}{n \cdot (n-1)}$

Utilizando lo anterior, tenemos que

$$n \cdot (n-1) \cdot A_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot B_k \cdot (n-k) \cdot C_{n-k}$$

Utilizando (2) y la propiedad de binomial convolution, tenemos como resultado

$$\partial_z^2 A(z) = (\partial_z B(z)) \cdot (\partial_z C(z))$$

Continuemos demostrando la propiedad 2). En este caso $A_n$ puede ser escrito a partir de $B_n$ y $C_n$ de la siguiente manera: $A_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} \cdot B_k \cdot C_{n-k}$. Debido a que tenemos n - 2 etiquetas para repartir (la mínima y la máxima ya están definidas), k - 2 de esas etiquetas son para la componente B (ya tiene la etiqueta 1 y la n asignadas) y el resto para la componente C.

Además, operando sobre $\binom{n-2}{k-k}$ obtenemos la siguiente igualdad: $\binom{n-2}{k-2} = \dfrac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} = \dfrac{n! \cdot k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1) \cdot k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot \dfrac{k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1)}$

Utilizando lo anterior, tenemos que

$$n \cdot (n-1) \cdot A_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1) \cdot B_k \cdot C_{n-k}$$

Utilizando (2) y la propiedad de binomial convolution, tenemos como resultado

$$\partial_z^2 A(z) = (\partial_z^2 B(z)) \cdot C(z)$$

Por último, demostremos la propiedad 3). En este caso $A_n$ puede ser escrito a partir de $B_n$, $C_n$ y $D_n$ de la siguiente manera: $A_n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n-3}{n_1-1, n_2-1, n_3-1} \cdot B_{n_1} \cdot C_{n_2} \cdot D_{n_3}$. Debido a que tenemos n - 3 etiquetas para repartir (la mínima, la segunda menor y la máxima ya están definidas), $n_1 - 1$ para la componente B (ya tiene la etiqueta 1 asignada), $n_2 - 1$ para la componente C (ya tiene la etiqueta 2 asignada) y $n_3 - 1$ para la componente D (ya tiene la etiqueta n asignada).

Además, operando sobre $\binom{n-3}{n_1-1,n_2-1,n_3-1}$ obtenemos la siguiente igualdad:

$\binom{n-3}{n_1-1,n_2-1,n_3-1} = \dfrac{(n-3)!}{(n_1-1)!\cdot(n_2-1)!\cdot(n_3-1)!} = \dfrac{n!\cdot n_1\cdot n_2\cdot n_3}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)} = \binom{n}{n_1,n_2,n_3}\cdot\dfrac{n_1\cdot n_2\cdot n_3}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}$

Utilizando lo anterior, tenemos que

$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot A_n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n}\binom{n}{n_1,n_2,n_3}\cdot n_1\cdot B_{n_1}\cdot n_2\cdot C_{n_2}\cdot n_3\cdot D_{n_3}$

Utilizando (2) y la propiedad de binomial convolution, tenemos como resultado

$\partial_z^3 A(z) = (\partial_z B(z))\cdot(\partial_z C(z))\cdot(\partial_z D(z))$

# 3 Ejercicio 31.

Sabemos por el ejemplo II.17 del libro que $tan(z)$ es la EGF de las permutaciones alternantes de largo impar. Una permutación alternante es una permutación $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ donde $\sigma_1 > \sigma_2$, $\sigma_2 < \sigma_3$, $\sigma_3 > \sigma_4 \cdots$

En este ejercicio se nos pide dar una interpretación combinatoria de $tan(e^z - 1)$, $tan(tan(z))$ y $tan(\frac{z}{1-z})$.

Inmediatamente, vemos $tan(e^z - 1)$ como una secuencia con una cantidad impar de conjuntos no vacios donde el primer conjunto es mayor al segundo, el segundo es menor al tercero, y así sucesivamente. Ahora, ¿a qué nos referimos cuando decimos que un conjunto es menor que otro? Para respondernos esta pregunta debemos observar de donde viene $tan(z)$.

En el ejemplo II.17 del libro, cuando se intenta obtener una EGF para las permutaciones alternantes de largo impar se utiliza la equivalencia entre estas y los árboles binarios crecientes. Luego, se escribe a $J$, el conjunto de las permutaciones alternantes, de la siguiente manera:

$$J = Z + Z^{\square} \star J \star J$$

Si en lugar de utilizar $Z$ utilizaramos $S$, la clase de conjuntos no vacíos, obtendríamos:

$$\hat{J} = S + S^{\square} \star \hat{J} \star \hat{J}$$

Sabemos que la EGF de $\hat{J}$ es $tan(e^z - 1)$ y ahora podemos responder a nuestra pregunta acerca de que era una secuencia alternante de conjuntos no vacíos. Alternante es entonces que el mínimo del primer conjunto, sea mayor al mínimo del segundo conjunto, que el mínimo del segundo conjunto sea menor al mínimo del tercer conjunto, y así sucesivamente. Más formalmente, sean $C_1$ y $C_2$ conjuntos no vacios, decimos que $C_1 < C_2$ sii $min(C_1) < min(C_2)$. Interpretamos entonces a $tan(e^z - 1)$ como la EGF de secuencias alternantes (según el orden total definido previamente) de una cantidad impar de conjuntos no vacios.

De forma análoga, interpretamos $tan(\frac{z}{1-z})$ como una secuencia alternante (Dadas dos secuencias no vacias $S_1$ y $S_2$, $S_1 < S_2$ sii $min(S_1) < min(S_2)$) de una cantidad impar de secuencias. De la misma manera, interpretamos $tan(tan(z))$ como una secuencia alternante de permutaciones alternantes.

Analizaremos el caso de los conjuntos un poco mas allá con el fin de intentar obtener una idea mas clara de lo que estamos hablando, para los otros dos casos es similar.

Una manera mas simple de ver lo dicho anteriormente es verlo como una secuencia de largo impar de conjuntos no vacios, cuyos mínimos forman una secuencia alternante. Secuencia de conjuntos no vacios nos hace pensar inmediatamente en una sobreyección, en este caso contamos funciones sobreyectivas con codominio $A \subset N$ tales que:

1) $|A|$ es impar

2) $min(f^{-1}(1)) > min(f^{-1}(2)) < min(f^{-1}(3)) > \cdots$

Donde 2) es equivalente a decir que los mínimos de las preimágenes forman una secuencia alternante.