Obligatorio 1, Combinatoria Analítica

Juan Pablo Martínez

3 de Junio de 2019

1 Ejercicio 7: Vallée's identity.

Sean $M = MSET(C)$ y $P = PSET(C) \implies M(z) = P(z) \cdot M(z^2)$

La identidad de Vallée es una identidad realmente intuitiva, veamos primero las definiciones de MultiSet y PowerSet. PowerSet define un conjunto sin repeticiones, recordemos que la diferencia entre un conjunto y una secuencia es que en el primero no importa el orden. Por otro lado, MultiSet define un multi-conjunto (conjunto con repeticiones). La identidad indica que a un multi-conjunto de C lo podemos escribir, de forma única, como un conjunto de C más un multi-conjunto de $C_2 = \{(e,e)/e \in C\}$, y viceversa.

Veamos lo primero, sea M un multi-conjunto de C, construiremos $\hat{M}$ multi-conjunto de C_2 y $\hat{S}$ conjunto de C. Sea $e \in M$, y n la cantidad de apariciones de e en M, entonces $(e,e) \in \hat{M}$, y la cantidad de apariciones de (e,e) en $\hat{M}$ es $\frac{n}{2}$ (redondeado hacia abajo). Además, si $n\%2 = 1$ entonces $e \in \hat{S}$.

Observamos que se respetan las definiciones de conjunto (cada elemento aparece como máximo una vez) y de multi-conjunto de C_2 (todo elemento en el multi-conjunto pertenece a C_2). Además, si sumamos las apariciones de e en $\hat{S}$, y en $\hat{M}$ (tomando la aparición de (e,e) en $\hat{M}$ como dos apariciones), nos da el mismo valor que las apariciones de e en M.

Por lo anterior, cualquier multi-conjunto de C puede ser escrito como un multi-conjunto de C_2 más un conjunto de C, el otro sentido (un conjunto de C, más un multi-conjunto de C_2 pueden ser escritos como un multi-conjunto de C) es también evidente.

La demostración de la identidad es la siguiente, si definimos C_n como $\#\{c \in C/|c| = n\}$, tenemos por el teorema I.1 que:

$PSET(C(z)) = \prod_{n\geq 1}(1+z^n)^{C_n}$
$MSET(C(z)) = \prod_{n\geq 1}(1-z^n)^{-C_n}$

Utilizando la segunda igualdad, tenemos que
$M(z^2) = \prod_{n\geq 1}(1 - z^{2\cdot n})^{-C_n}$

A partir de aquí, operamos aritméticamente:

$P(z) \cdot M(z^2) = \prod_{n\geq 1}(1 + z^n)^{C_n} \cdot (1 - z^{2\cdot n})^{-C_n}$

$P(z) \cdot M(z^2) = \prod_{n\geq 1}((1 + z^n)^{-1} \cdot (1 - z^{2\cdot n}))^{-C_n}$

$P(z) \cdot M(z^2) = \prod_{n\geq 1}(\frac{1 - z^{2\cdot n}}{1 + z^n})^{-C_n}$

$P(z) \cdot M(z^2) = \prod_{n\geq 1}(\frac{(1 - z^n) \cdot (1 + z^n)}{1 + z^n})^{-C_n}$

$P(z) \cdot M(z^2) = \prod_{n\geq 1}(1 - z^n)^{-C_n}$

$P(z) \cdot M(z^2) = M(z)$

2 Ejercicio 20.

Podemos escribir a $\dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{99}{100} \cdot \dfrac{999}{1000} \cdot \dots$

Como $\prod_{n\geq 1}(1 - \dfrac{1}{10^n})$

Por el Ejercicio 19 del libro, tenemos por el Euler's pentagonal number theorem:
$\prod_{n\geq 1}(1 - z^n) = \sum_{k\in Z}(-1)^k \cdot z^{k\cdot(3k+1)/2}$

En particular, tomando $z = \dfrac{1}{10}$ obtenemos que:
$\prod_{n\geq 1}(1 - \dfrac{1}{10^n}) = \sum_{k\in Z}(-1)^k \cdot \dfrac{1}{10}^{k\cdot(3k+1)/2}$

Definiendo $f(k) = \dfrac{k\cdot(3\cdot k+1)}{2}$, tenemos como resultado
$\prod_{n\geq 1}(1 - \dfrac{1}{10^n}) = \sum_{k\in Z}(-1)^k \cdot \dfrac{1}{10}^{f(k)}$

Estudiaremos la función f restricta a los enteros. La primer observación es que $f(k) > 0\ \forall z \in Z$, la segunda observación es que $f(k) \in N\ \forall k \in Z$. La tercera observación es que $\forall k > 0\ f(-k) < f(k) < f(-(k+1)) < f(k+1)$.

La primera observación y la segunda son triviales, demostraremos las distintas desigualdades.

1) $f(-k) < f(k)$
Sea $k > 0$, $f(k) = \dfrac{k\cdot(3\cdot k+1)}{2}$
$\implies f(k) = \dfrac{3\cdot k^2 + k}{2}$
$\implies f(k) - f(-k) = \dfrac{3\cdot k^2 + k}{2} - \dfrac{3\cdot k^2 - k}{2}$
$\implies f(k) - f(-k) = \dfrac{k + k}{2}$
$\implies f(k) - f(-k) = k > 0$
$\implies f(k) > f(-k)$

2) $f(k) < f(-(k+1))$
Sea $k > 0$, $f(k) = \dfrac{k\cdot(3k+1)}{2}$
$\implies f(k) = \dfrac{3\cdot k^2 + k}{2}$
$\implies f(k) - f(-(k+1)) = \dfrac{3\cdot k^2 + k}{2} - \dfrac{(3\cdot(k+1)^2 - (k+1))}{2}$

$$\implies f(k) - f(-(k+1)) = \frac{3 \cdot k^2 + k - (3 \cdot (k^2 + 2k + 1) - (k+1))}{2}$$
$$\implies f(k) - f(-(k+1)) = \frac{3 \cdot k^2 + k - (3 \cdot k^2 + 6 \cdot k + 3 - k - 1)}{2}$$
$$\implies f(k) - f(-(k+1)) = \frac{3 \cdot k^2 + k - (3 \cdot k^2 + 5 \cdot k + 2)}{2}$$
$$\implies f(k) - f(-(k+1)) = \frac{-4 \cdot k - 2}{2}$$
$$\implies f(k) - f(-(k+1)) = -2 \cdot k - 1 < 0$$
$$\implies f(k) < f(-(k+1))$$

3) $f(-(k+1)) < f(k+1)$
Inmediato a partir de 1)

Lo anterior implica que:
$f(-1) < f(1) < f(-2) < f(2) < f(-3) < f(3) < \cdots$

Si observamos además que $f(0) = 0$ y que $f(-1) = 1$
$f(0) < f(-1) < f(1) < f(-2) < f(2) < f(-3) < f(3) < \cdots$

Volviendo a lo anterior, sabíamos que
$\prod_{n \geq 1}(1 - \frac{1}{10^n}) = \sum_{k \in Z}(-1)^k \cdot \frac{1}{10}^{f(k)}$
$\implies \prod_{n \geq 1}(1 - \frac{1}{10^n}) = (-1)^0 \cdot \frac{1}{10}^{f(0)} + (-1)^1 \cdot \frac{1}{10}^{f(1)} + (-1)^{-1} \cdot \frac{1}{10}^{f(-1)} + \sum_{k \in Z, |k| \geq 2}(-1)^k \cdot \frac{1}{10}^{f(k)}$

$$\implies \prod_{n \geq 1}(1 - \frac{1}{10^n}) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \sum_{k \in Z, |k| \geq 2}(-1)^k \cdot \frac{1}{10}^{f(k)}$$
$$\implies \prod_{n \geq 1}(1 - \frac{1}{10^n}) = 0.89 + \sum_{n \geq 2}((-1)^n \cdot \frac{1}{10}^{f(n)} + (-1)^{-n} \cdot \frac{1}{10}^{f(-n)})$$
$$\implies \prod_{n \geq 1}(1 - \frac{1}{10^n}) = 0.89 + \sum_{n \geq 2}(\frac{1}{10}^{f(-2 \cdot n)} + \frac{1}{10}^{f(2 \cdot n)} - \frac{1}{10}^{f(-(2 \cdot n+1))} - \frac{1}{10}^{f(2 \cdot n+1)})$$

Prestemos atención a esta sumatoria, como $f(-2 \cdot n)$ es un natural positivo, entonces $\frac{1}{10^{f(-2 \cdot n)}}$ va a agregar un 1 en la representación decimal de la sumatoria (más precisamente, $f(-2 \cdot n)$ lugares después de la coma). Similar para $2 \cdot n$, que va a agregar un 1 más a la derecha de la representación decimal. Esto se debe a que $\frac{1}{10^{f(-2 \cdot n)}} > \frac{1}{10^{f(2 \cdot n)}}$.

Luego, se va a restar $\dfrac{1}{10^{f(-(2\cdot n+1))}}$, pero como teníamos un 1 $f(2\cdot n)$ lugares después de la coma, todos los números que están entre $f(2\cdot n)$ y $f(-(2\cdot n+1))$ lugares después de la coma, se transformarán en 9's. Cuando a este número le restamos $\dfrac{1}{10^{f(2\cdot n+1)}}$, el número en la posición $f(-(2\cdot n+1))$ después de la coma se transforma en un 8, y todos los restantes número hasta la posición $f(2\cdot n+1)$ después de la coma se convierten en 9s. Si veo esto para n + 1, pasa exactamente lo mismo, con el agregado que no se modifican los números anteriores debido a que $f(2\cdot n+1) < f(-(2\cdot n+2))$.

Por lo anterior, queda en evidencia que $\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{99}{100}\cdot\dfrac{999}{1000}\cdot\cdots$ es un decimal cuya representación está conformada por únicamente los números 0, 1, 8 y 9.

3 Ejercicio 21.

Debemos obtener:
$\#\{z \in Z^d / ||z|| \leq n\}$
Lo cual es equivalente a:
$\#\{z \in Z^d / z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_d^2 \leq n^2\}$
Y también es equivalente a:
$\#\{z \in Z^d / \exists a \in N \wedge z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_d^2 + a = n^2\}$

Ahora, si tomamos el conjunto S como $S = \{k \in Z / \exists r \in Z \wedge |k| = r^2\}$. Podemos reescribir todo lo anterior como:
$\#\{s \in S^d / \exists a \in N \wedge |s_1| + |s_2| + \cdots + |s_d| + a = n^2\}$

De manera combinatoria, podríamos ver S como un conjunto que tiene dos elementos de igual largo para cada cuadrado perfecto (haciendo conicidir largo con valor absoluto), ambos opuestos. A excepción del largo 0, para el cual posee un único elemento.
Observamos que $0 \in S$, $1 \in S$, $-1 \in S$, $2 \in S$, $-2 \in S$, $4 \in S$, $-4 \in S$, pero $3 \notin S$, y $-3 \notin S$.

La OGF de S sería entonces $\Theta(z) = 1 + 2 \cdot \sum_{n \geq 0} z^{n^2}$. Además, como la OGF de $N = \dfrac{1}{1-z}$, podemos calcular $\#\{s \in S^d / \exists a \in N \wedge |s_1| + |s_2| + \cdots + |s_d| + a = n^2\}$ como $[z^{n^2}] \dfrac{1}{1-z} \cdot (\Theta(z))^d$. Esto se entiende como: las maneras de tomar un a natural (de allí viene el $\dfrac{1}{1-z}$), y un elemento de S^d (equivalentemente, una secuencia de largo d de elementos de S) tal que la suma de sus valores absolutos de n^2.