Obligatorio Combinatoria Analítica Rep. 1

UdelaR/Fing.

22 de Mayo de 2019

Ejercicio 8:

Primero recordamos como que sobre el conjunto de las series formales podemos definir una distancia. En efecto, dadas f, g series formales, se define

$$d(f,g) = \begin{cases} 2^{-\mathrm{val}(f-g)} & \text{si } f \neq g \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde *val* es el exponente del primer término no nulo de la serie.

Sea f_j la serie asociada a la clase $A^{[j]}$ y f la correspondiente a $A^{[\infty]}$.

La condición $A^{[j]} \subset A^{[j+1]}$ respetando la noción de tamaño significa que para todo n, $A_n^{[j]} \subset A_n^{[j+1]}$. Entonces, para todo n, la serie $([z^n]f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Por otro lado, $A^{[\infty]} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A^{[j]}$ implica $A_n^{[\infty]} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n^{[j]}$ para todo n. Como $A_n^{[\infty]}$ es finito (por definición de clase combinatoria), la sucesión $([z^n]f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ debe ser acotada, para cada n.

Como $([z^n]f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente, acotada y entera, se deduce que para algún k_n estabiliza; es decir, se tiene $[z^n]f_j = [z^n]f_{k_n} \forall j \geq k_n$. Además es claro, dicho valor debe ser $[z^n]f_\infty$. Finalmente, veamos $f_{[\infty]} = lim_n f_j$:

Dado $\epsilon > 0$, tomemos v de modo que $\frac{1}{2^v} < \epsilon$. Si tomamos $n_0 = \max\{k_1, .., k_{v-1}\}$ y $n \geq n_0$, entonces $[z^i]f_n = [z^i]f_\infty$ para $i < v$. Por lo tanto, $\mathrm{val}(f_n - f_\infty) \geq v$, y, por definición de v, $d(f_n, f_\infty) < \epsilon$.

Ejercicio 16:

Parte I:
Observemos primero que la formula se puede reescribir como

$$P^{<k,l>}(z) = \frac{(1-z^{k+1})\cdots(1-z^{k+l})}{(1-z)\cdots(1-z^{l})}$$

.

Siguiendo la sugerencia en el libro, veamoslo la validez de la fórmula por inducción en l:

- Si $l=1$, $P^{<k,l>}(z) = P^{<k,1>}(z) = \frac{(1-z^{k+1})}{(1-z)} = \sum_{i=1}^{k} z^i$, lo cual indica indica que hay una única forma de escribir cada número entre 0 y k con 0 ó 1 sumando de tamaño menor o igual a k.

- Si $l \geq 1$, y suponiendo que $P^{<k,l>}$ tiene la forma indicada, veámoslo para $P^{<k,l+1>}$. Es decir, basta ver que $P^{<k,l+1>}(z) = \frac{1-z^{k+l+1}}{1-z^{l+1}} P^{<k,l>}(z)$, o lo que es lo mismo:
  $(1-z^{l+1})P^{<k,l+1>}(z) = (1-z^{k+l+1})P^{<k,l>}(z)$:
  Si llamamos $p_n^{k,i}$ a $[z^n]P^{<k,i>}$, observamos que lo úlitmo es equivalente a tener

  $$p_n^{k,l+1} - p_{n-(l+1)}^{k,l+1} = p_n^{k,l} - p_{n-k-(l+1)}^{k,l}$$

  , es decir

  $$p_n^{k,l+1} - p_n^{k,l} = p_{n-(l+1)}^{k,l+1} - p_{n-k-(l+1)}^{k,l}$$

  .

  Verifiquemos la validez de ésta igualdad viendo que cada lado de igualdad resuelve el mismo problema de conteo:

  – $p_n^{k,l+1} - p_n^{k,l}$ es el número de particiones de n con a lo sumo k sumandos, de tamaño a lo sumo $l+1$, pero donde algún sumando és $l+1$.

  – $p_{n-(l+1)}^{k,l+1}$ puede pensarse como el número de particiones de n con a lo sumo $k+1$ sumandos, donde al menos uno de ellos es $l+1$.
  $p_{n-k-(l+1)}^{k,l}$ es la solución al problema de conteo

  $$[\{x_1, \cdots, x_k \in \{0 \cdots l\} : x_1 + \cdots + x_k = n-k-(l+1)\}]$$

  [1], o bien, sumando k de ambos lados y llamando y_i a $x_i + 1$, es equivalente a

  $$[\{y_1, \cdots, y_k \in \{1 \cdots l+1\} : y_1 + \cdots + y_k + (l+1) = n\}]$$

  Entonces, $p_{n-k-(l+1)}^{k,l}$ denota al número de particiones de n con exáctamente $k+1$ sumandos, donde al menos uno de ellos es $l+1$.
  Concluimos con que $p_{n-(l+1)}^{k,l+1} - p_{n-k-(l+1)}^{k,l}$ es también el número de particiones de n con a lo sumo k sumandos menores o iguales a $l+1$, donde al menos uno de ellos es $l+1$.

[1] $[\{...\}]$ es mi notación para multiconjunto

Al haber probado el caso base y el caso inductivo, queda probada la afirmación.

Parte II:
Vemos que con $z \longrightarrow 1$, $P^{<k,l>}(z) \longrightarrow \binom{k+l}{l}$ por inducción en l:

- Si $l = 0$, vimos que $P^{<k,l>}(z) = \sum_{i=1}^{k} z^i$, y cuando $z \longrightarrow 1$ tiende a $k+1 = \binom{k+1}{1}$
- Si $l \geq 1$, $P^{<k,l>}(z) = \frac{1-z^{k+l}}{1-z^l} P^{<k,l-1>}(z)$, y como sabemos, $\binom{k+l}{l} = \frac{k+l}{l}\binom{k+l-1}{l-1}$, por lo que basta ver que $\frac{1-z^{k+l}}{1-z^l} \longrightarrow \frac{k+l}{l}$.

  La regla de L'Hopital indica que $lim_{z \longrightarrow 1} \frac{1-z^{k+l}}{1-z^l} = lim_{z \longrightarrow 1} \frac{-(k+l)z^{k+l-1}}{-lz^{l-1}} = \frac{k+l}{l}$, con lo que queda probada la afirmación.

Ejercicio 59:

Teorema (Polya-Redfield): Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto X. Sea $\mathcal{B} = (B, w)$ una clase combinatoria.

- Consideremos $\mathcal{B}^X = (B^X, \hat{w})$ como una clase combinatoria, donde $\hat{w}(f) = \prod_{x \in X} w(f(x))$
- Extendemos la acción a B^X, siendo $(g \cdot f)(x) = f(g \cdot x)$[2]
- El conjunto de órbitas $\mathcal{B}^X/\mathcal{G} = (B^X/G, \hat{w})$ como clase combinatoria, ya que $\hat{w}$ está bien definida[3]

Sea f la función generatriz de $\mathcal{B}^X$ y $\hat{f}$ la generatriz de $\mathcal{B}^X/\mathcal{G}$. La construcción

$$\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^X/\mathcal{G}$$

es admisible y se tiene:

$$\hat{f}(z) = Z(G, f(z), ..., f(z^m))$$

siendo $Z(G, x_1, .., x_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{c_1(g)} ... x_m^{c_m(g)}$, $m = |X|$ y $c_i(g)$ el número de ciclos de tamaño i en g visto como permutación de X.

Lema 1 (Burnside): Sea G un grupo finito actuando sobre el conjunto finito $|X|$. Dado g, sea $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$. Notemos X/G al conjunto de orbitas de la acción. Entonces se tiene:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

dem Lema: Sabemos que $X/G = \{X_1, ..., X_k\}$, siendo X_i las órbitas de la acción. Sabemos que la acción restringe a cada órbita, por lo que es posible considerar X_i/G. Pero las acciones son transitivas en las órbitas, luego $|X_i/G| = |\{X_i\}| = 1$.
Como las órbitas forman una partición de X, se tiene que $|X^g| = \sum_{i=1}^{k} |X_i^g|$. Luego, basta ver

$$1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_i^g| \quad \forall i \in \{1..k\}$$

Si consideramos $\sum_{g \in G}$ como el operador de suma disjunta[4], es claro que

$$\sum_{g \in G} |X_i^g| = |\sum_{g \in G} X_i^g| = |\{(g, x) \in G \times X_i : g \cdot x = x\}| = \text{Fix}(G, X_i)$$

.

[2]Se verifica trivialmente que es una acción
[3]Por la propiedad universal del cociente, ya que $\hat{w}$ es constante en cada órbitas
[4]indexada en G

Ahora, llamemos $\mathrm{Fix}(G,x) = \{(g,x) \in G{\times}X_i : g{\cdot}x = x\}$ Por un lado sabemos que $\mathrm{Fix}(G,x) \simeq \{g \in G : g{\cdot}x = x\} = \mathrm{Stab}_G(x)$ Por otro lado, sabemos que $\mathrm{Fix}(G,X_i) = \biguplus_{x\in X_i} \mathrm{Fix}(G,x)$. Luego:

$$\sum_{g\in G} |X_i^g| = |\mathrm{Fix}(G,X_i)| = \sum_{x\in X_i} |\mathrm{Stab}_x(G)|$$

Por lo tanto, para terminar basta ver que

$$|G| = \sum_{x\in X_i} |\mathrm{Stab}_G(x)|$$

Fijemos $x_0 \in X_i$. Sea $\mathrm{MapsTo}_G(x) = \{g \in G : g\cdot x_0 = x\}$ Es claro que podemos escribir G como la unión disjunta $\biguplus_{x\in X_i} \mathrm{MapsTo}_G(x)$. Por otro lado, $\mathrm{MapsTo}_G(x) \simeq Stab_G(x)$[5]. De aquí tenemos:

$$|G| = |\biguplus_{x\in X_i} \mathrm{MapsTo}_G(x)| = \sum_{x\in X_i} |\mathrm{MapsTo}_G(x)| = \sum_{x\in X_i} |Stab_G(x)|$$

dem Teorema Sea $(B^X/G)_k$ el conjunto de órbitas de tamaño k[6]. Si aplicamos el Lema de Burnside a la acción de G sobre el conjunto $(B^X/G)_k = (B^X)_k/G$, [7]tenemos la ecuación:

$$|(B^X)_k/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |(B^X)_k^g| \qquad (*)$$

Hagamos algunas observaciones:

- $(B^X)_k^g$ es el conjunto de funciones de tamaño k que verifican $f(g\cdot x) = f(x)$
- Podemos escribir g como una composición de ciclos en X [8]: $(x_{a_1^1}..x_{a_{i_1}^1})..(x_{a_1^j}..x_{a_{i_j}^j})$[9].
- Es claro que f está en $(B^X)_k^g$ si y solo si es constante en los ciclos de g.

En vista de las observaciones anteriores es claro que $|(B^X)_k^g|$ se puede calcular contando cuantas funciones de tamaño k son constantes en ciclos.
Vayamos un paso más e intentemos buscar una especificacion para $(\mathcal{B}^X)^g$ a partir de construcciones admisibles:

- Podemos pensar a g como la clase combinatoria producto $\prod_{i=1}^m \mathcal{C}_1^i \times ... \times \mathcal{C}_{c_i}^i$ que representa su descomposición en ciclos. Pensemos cada $\mathcal{C}_i^j$ como la clase que tiene un sólo elemento de tamaño 1.
- Sabemos que $f \in (\mathcal{B}^X)^g$ si y solo es constante en ciclos de g. Luego, f puede ser visto como un elemento de $\prod_{i=1}^m (\mathcal{C}_1^i \times \mathcal{B}) \times ... \times (\mathcal{C}_{c_i}^i \times \mathcal{B})$
- Para ser consistentes con el tamaño de f, cada elección de cierto b para el ciclo debe pesar según la multiplicidad del ciclo.

[5]Hay una biyección sencilla. Basta tomar $g_0 \in \mathrm{MapsTo}_G(x)$ y considerar $f(g) = gg_0^{-1}$
[6]Es decir, el conjunto subyacente a $(\mathcal{B}^X/\mathcal{G})_k$
[7]El lema lo tenemos probado para conjuntos finitos y$(B^X/G)_k$ es un conjunto finito
[8]Toda biyección en X admite tal descomposición
[9]Esto significa que $g\cdot x_{a_j^r} = x_{a^r_{(j+1 \ (\mathrm{mod}\, i_r)}}$

- En concordancia con el item anterior, llamemos $\mathcal{B}^{(k)}$ a la clase combinatoria (B, w^k). La especificación para $(\mathcal{B}^X)^g$ es $\prod_{i=1}^m (\mathcal{C}_1^i \times \mathcal{B}^{(i)}) \times ... \times (\mathcal{C}_{c_i}^i \times \mathcal{B}^{(i)})$

La construcción que realizamos para $(\mathcal{B}^X)^g$ es admisible, ya que:

- La construccion $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ es admisible con generatriz $X(z)Y(z)$
- El operador $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{(i)}$, que es admisible con generatriz $X(z^i)$

Por lo tanto, la generatriz de $(\mathcal{B}^X)^g$ es $f^g(z) = f(z^1)^{c_1}...f(z^m)^{c_m}$. Luego $|(B^X)_k^g| = [z^k]f^g(z)$ y en consecuencia, por $(*)$, se tiene

$$[z^k]\hat{f} = |((B^X)/G)_k| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}[z^k]f^g = [z^k]\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f^g$$

Es decir

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(z)^{c_1(g)}...f(z^m)^{c_m(g)}$$