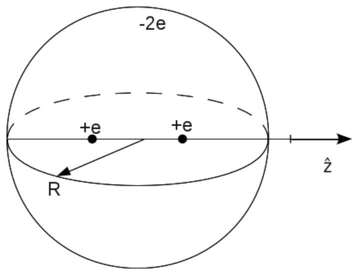
Solución del examen del 13 de diciembre de 2011

Instituto de Física - Facultad de Ingeniería

Problema 1

Un modelo simple de la molécula de hidrógeno (H_2) considera dos cargas puntuales (los protones) de valor $+e$, inmersas en una nube esférica de radio R, con carga $-2e$ distribuida uniformemente, que representa a los dos electrones.



a) Determine la posición de equilibrio eléctrico entre las dos cargas puntuales, suponiendo que se encuentran situadas simétricamente respecto al centro de la nube.

Resolvemos este problema balanceando las fuerzas de Coulomb sobre los protones. Llamemos a a la distancia en que se encuentran los protones con respecto al centro de la esfera. El módulo de la fuerza repulsiva que cada uno ejerce sobre el otro, a una distancia $2a$, es

$$F_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(2a)^2}$$

Debido a la simetría esférica, la nube de carga negativa produce un campo eléctrico en la posición de los protones exactamente igual al que produciría una carga puntual en el centro de la esfera, y con una carga igual a la contenida en una esfera concéntrica de radio a. Esto se demuestra fácilmente aplicando la Ley de Gauss a la superficie de la esfera.

Una carga de valor $-2e$ está distribuida uniformemente en el volumen $4\pi R^3/3$ de la esfera de radio R. Entonces, la carga en una esfera de radio $a \leq R$ es $q = -2e \times a^3/R^3$. La nube de electrones produce una fuerza que atrae a los protones hacia el centro de módulo

$$F_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|e}{a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2 a}{R^3}$$

Los protones están en equilibrio si se igualan los módulos de las fuerzas de atracción y repulsión. Esto conduce a plantear

$$F_+ = F_- \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{(2a)^2} = \frac{2a}{R^3} \quad \leftrightarrow \quad a = \frac{R}{2}$$

Observemos que la única solución posible es con $a \leq R$. En efecto, si $a > R$, se cumple $F_- > F_+$ (ya que F_- es producida por una carga de mayor valor absoluto y más próxima).

b) ¿Existe una configuración de equilibrio en la cual las cargas no se encuentren alineadas con el centro de la esfera de radio R? Justifique.

La única posibilidad para mantener los protones en equilibrio es que estén alineados con el centro de la esfera. Debido a la simetría esférica, la nube electrónica ejerce siempre una fuerza de dirección radial sobre los protones, en sentido hacia el centro. La fuerza de repulsión entre los protones tiene la dirección de la linea que une las partículas. Las fuerzas de atracción y repulsión no pueden cancelarse, a menos que los protones estén en línea con el centro.

Además, como los protones tienen idéntica carga, tienen que estar a la misma distancia del centro. De lo contrario, la nube electrónica ejerce una fuerza de distinto módulo sobre cada protón (en función de la distancia al centro de la nube), mientras que las fuerzas repulsivas entre estos son del mismo módulo. Para que ambos protones puedan estar en equilibrio, tienen que hallarse a la misma distancia del centro.

c) Calcule el potencial en *todos* los puntos del espacio en la situación anterior.

La contribución al potencial en $\mathbf{r}$ debida a los protones, situados en las posiciones $a\hat{z}$ y $-a\hat{z}$ es

$$V_+(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-a\hat{z}|}+\frac{1}{|\mathbf{r}+a\hat{z}|}\right)$$

(con el nivel de referencia en el infinito).

La forma de la contribución debida a la nube electrónica depende de si el punto $\mathbf{r}$ está en el interior o en exterior de la nube. Para puntos en el exterior, con $|\mathbf{r}| > R$, el potencial es el mismo que el de una carga puntual $-2e$ en el centro:

$$V_-(\mathbf{r}) = -\frac{2e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}|} \qquad (r > R)$$

En el interior de la nube, a una distancia $\mathbf{r} < R$ del centro, por una razonamiento análogo al de la primer parte, el potencial es el correspondiente al producido por una carga puntual con magnitud igual a la carga encerrada por una esfera concéntrica de radio $\mathbf{r}$:

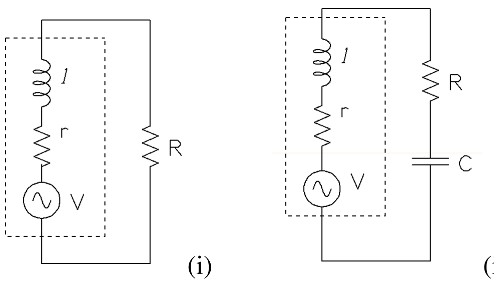
$$V_-(\mathbf{r}) = -\frac{2e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\mathbf{r}|}{R^3} \qquad (r < R)$$

El potencial total en $\mathbf{r}$ vale

$$V(\mathbf{r}) = V_+(\mathbf{r})+V_-(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{|\mathbf{r}-a\hat{z}|}+\dfrac{1}{|\mathbf{r}+a\hat{z}|}-\dfrac{2}{|\mathbf{r}|}\right), & r > R \\[2ex] \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{|\mathbf{r}-a\hat{z}|}+\dfrac{1}{|\mathbf{r}+a\hat{z}|}-\dfrac{2|\mathbf{r}|}{R^3}\right), & r < R \end{cases}$$

Problema 2

Un generador de corriente alterna real puede modelarse como un generador sinusoidal ideal, de amplitud $V_0 = 300\text{V}$ y frecuencia $f = 50\text{Hz}$, en serie con una resistencia $r = 5\Omega$ y una inductancia $l = 0{,}1\text{H}$, como muestra la figura (i). A dicho generador se le conecta una resistencia $R = 100\Omega$.



(i) (ii)

a) Calcule la potencia media entregada por el generador ideal.

Para hallar la potencia media entre dos puntos de un circuito de corriente alterna se puede usar el resultado

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\text{Re}[VI^*]$$

donde V e I son las amplitudes complejas asociadas al voltaje y la corriente entre esos puntos. El asterisco simboliza la conjugación compleja, y Re es la parte real. Este resultado es válido para el régimen estacionario de un circuito con una fuente sinusoidal de una sola frecuencia.

La impedancia total del circuito (vista por el generador ideal) es la suma de las impedancias de los elementos en serie:

$$Z_T = Z_r + Z_R + Z_l = r + R + j\omega l,$$

siendo j la unidad imaginaria y $\omega = 2\pi f = 314\text{rad/s}$ la frecuencia angular. La amplitud de corriente del circuito vale

$$I = \frac{V_G}{Z_T} = \frac{V_G}{R_T + j\omega l},$$

siendo $V_G = 300\text{V}$ la amplitud del voltaje del generador, y llamamos $R_T = r + R = 105\Omega$ a la resistencia total del circuito.

La potencia resulta

$$\bar{P}_G = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\frac{|V_G|^2}{R_T - j\omega l}\right] = \frac{|V_G|^2}{2R_T\left(1+\left(\frac{\omega l}{R_T}\right)^2\right)} = 393\text{W}$$

b) Determine la diferencia de potencial en la resistencia.

La amplitud compleja de la diferencia de potencial es

$$V_R = Z_R I = \frac{RV}{r+R+j\omega l} = \frac{RVe^{j\phi_R}}{\sqrt{R_T^2 + (\omega l)^2}},$$

donde la fase compleja cumple $\tan\phi_R = -\omega l/R_T = -0{,}2992$ ($\phi_R = -0{,}291\text{rad}$). La diferencia de potencial es

$$v_R(t) = |V_R|\cos(\omega t + \phi_R),$$

hallando el valor $|V_R| = 274\text{V}$.

c) Compare la potencia media disipada por la resistencia con la que entrega el generador y explique el resultado.

La potencia media en la resistencia es

$$\bar{P}_R = \frac{1}{2}\text{Re}\left[V_R I^*\right] = \frac{1}{2}\text{Re}\left[Z_R |I|^2\right] = \frac{R|V_G|^2}{2R_T^2\left(1+\left(\frac{\omega l}{R_T}\right)^2\right)} = 374\text{W}.$$

Se cumple que $\bar{P}_G > \bar{P}_R$. Más aún, se verifica que $\bar{P}_R = \bar{P}_G \times R/R_T$. En forma análoga se puede hallar que la potencia media disipada por la resistencia es $\bar{P}_r = \bar{P}_G \times r/R_T$, de manera que $\bar{P}_G = \bar{P}_R + \bar{P}_r$. La potencia media entregada por el generador ideal es disipada por las resistencias del circuito (es sencillo verificar, además, que el inductor tiene potencia media nula).

d) Se desea colocar un capacitor C en *serie* con la resistencia para mejorar la eficiencia del generador (figura ii). ¿Qué valor debe tener C para que la potencia media entregada por el generador ideal sea máxima?

Con el capacitor en serie, la impedancia total es

$$Z'_T = Z_r + Z_R + Z_l + Z_C = r + R + j\left(\omega l - \frac{1}{\omega C}\right),$$

y la amplitud de la corriente, por consiguiente, es

$$I' = \frac{V_G}{Z'_T} = \frac{V_G}{R_T + j\left(\omega l - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

De la misma forma que antes, hallamos la potencia media del generador

$$\bar{P}'_G = \frac{1}{2}\text{Re}\left[V_G I'^*\right] = \frac{|V_G|^2}{2R_T\left(1+\frac{1}{R_T^2}\left(\omega l - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)}.$$

El máximo de potencia se da para el valor de C para el cual el denominador es lo menor posible, de lo cual se desprende

$$C = \frac{1}{\omega^2 l} = 101\mu\text{F}.$$

e) Calcule la potencia disipada por la resistencia y la entregada por el generador ideal, en presencia del capacitor hallado anteriormente.

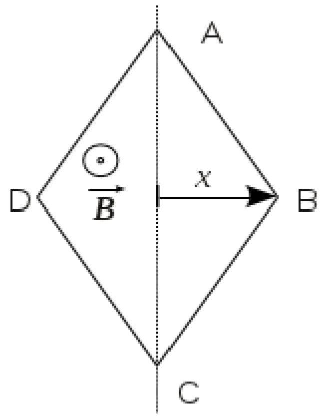
Usando el capacitor calculado anteriormente, las potencias medias son

$$\bar{P}'_G = \frac{|V_G|^2}{2R_T} = 429\text{W},$$

$$\bar{P}'_R = \bar{P}_G \frac{R}{R_T} = 409\text{W}.$$

Problema 3

En la figura se muestra un rombo de lado l articulado en sus vértices. Los vértices A y C pueden desplazarse por un riel vertical y los vértices B y D pueden desplazarse de manera horizontal. Los lados del rombo son conductores y la resistencia total del mismo es R. Se aplica a dicho sistema un campo magnético uniforme B perpendicular al plano del rombo tal como muestra la figura. Un agente externo mueve el vértice B de forma que la coordenada x (ver figura) obedece a la ley $x = l\cos(\omega t)$, desde $t = 0$ hasta $t = \pi/2\omega$.



1) Calcule la corriente inducida en el rombo, despreciando su autoinducción.

El área encerrada por la superficie del rombo en el instante t es (cuatro veces el área de un triángulo de base x y altura h)

$$\begin{aligned} a =& 4 \times \tfrac{1}{2} xh \\ =& 2x\sqrt{(l^2 - x^2)} \\ =& 2l^2\cos(\omega t)\sqrt{(1-\cos^2(\omega t)} \\ =& 2l^2\cos(\omega t)|\sin(\omega t)| \\ =& l^2\cos(2\omega t) \end{aligned}$$

$(\sin(\omega t) > 0$ si $0 < t < \pi/2\omega)$.
El flujo magnético a través de esta superficie (eligiendo la normal con el mismo sentido que el campo) es $\Phi_B = aB$. La f.e.m. inducida al variar el área es

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 2Bl^2\omega\sin(2\omega t).$$

La corriente por la espira es

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R} = +\frac{2Bl^2}{R}\omega\sin(2\omega t)$$

El signo positivo indica que la corriente inducida es antihoraria (de acuerdo con la orientación elegida para la superficie). Esto es esperable, ya que el flujo está disminuyendo, y el campo inducido se opone a ello.

2) Calcule la energía disipada por efecto Joule en el proceso.

La potencia instantánea está dada por $P(t) = Ri^2(t)$. La energía disipada es

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\pi/2\omega} P(t)dt \\ &= \frac{(2Bl^2\omega)^2}{R} \int \cos^2(\omega t)dt \\ &= \frac{(2Bl^2\omega)^2}{R} \frac{\pi}{4\omega} = \frac{B^2 l^4 \omega \pi}{R} \end{aligned}$$