Primer Parcial de Física 3 - Solución

2 de mayo 2024

Ejercicio 1

(a) Para hallar el campo eléctrico en el interior del cilindro macizo tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de radio $r < a$, siendo su eje coincidente con el eje del cilindro macizo. Al aplicar la ley de Gauss obtenemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde $Q = \rho \pi r^2 L$. Por la simetría del problema podemos escribir:

$$E 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0},$$

de lo que se deduce

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\epsilon_0}, \text{ si } r < a.$$

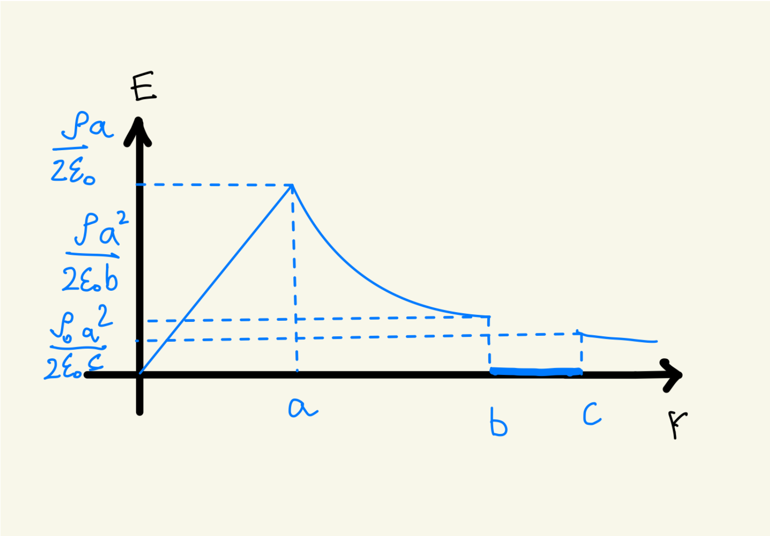
Para valores de $r > a$, la carga encerrada Q es constante y vale $Q = \rho \pi a^2 L$, por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}, \text{ si } a < r < b \text{ o } r > c.$$

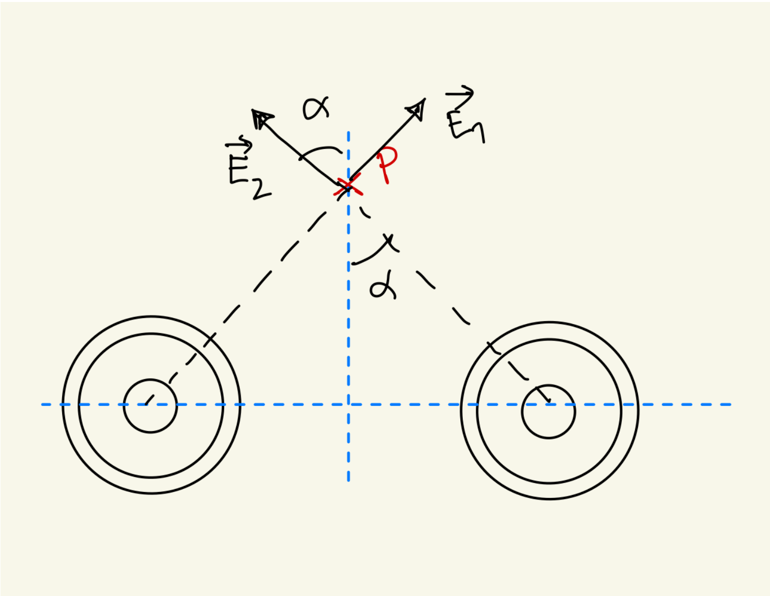
Para valores de r tales que $b < r < c$, $\vec{E} = 0$, debido a que el cascarón es conductor.

Para determinar la carga en las superficies definidas por $r = b$ y $r = c$ podemos usar nuevamente la ley de Gauss. Es fácil ver que el flujo a través de una superficie cilíndrica gaussiana con un radio $b < r < c$ es cero, ya que la superficie se encuentra completamente contenida en el interior de un material conductor. En consecuencia la carga encerrada es cero y, por lo tanto, $Q(r = b) = -\rho a^2 \pi L$. Como la carga neta del conductor es nula, entonces $Q(r = c) = -Q(r = b) = \rho a^2 \pi L$.

(b)



(c) El campo eléctrico total es la suma $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, como se muestra en la figura. Por otra parte, como el punto P es equidistante de los dos sistemas cilíndiricos y como estos son idénticos, tenemos que $E_1 = E_2$.



En consecuencia, el campo eléctrico total tiene dirección vertical y su módulo es

$$E_T = 2E_1 cos(\alpha) = 2E_1 \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}},$$

donde, de acuerdo a la parte a) $E_1 = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 \sqrt{D^2+y^2}}$. Finalmente:

$$E_T = \frac{\rho a^2 y}{\epsilon_0 (D^2 + y^2)},$$

(d) Como la única fuerza que actúa sobre la carga es la fuerza eléctrica, entonces la energía de la partícula se conserva:

$$\Delta U + \Delta K = 0,$$

donde ΔU y ΔK refieren a la variación de energía potencial eléctrica y variación de energía cinética, respectivamente. Para hallar ΔU, podemos calcular en primer lugar ΔV:

$$\Delta V = -\int_0^{d=\sqrt{3}D} \vec{E} \cdot d\vec{y} = -\int_0^{d=\sqrt{3}D} \frac{\rho a^2 y dy}{\epsilon_0 (D^2 + y^2)} = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \log(4).$$

Esto implica que

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v_0^2 = q\Delta V = -\frac{q\rho a^2 \log(4)}{2\epsilon_0},$$

entonces

$$v_0 = \sqrt{\frac{q\rho a^2 \log(4)}{m\epsilon_0}}$$

Ejercicio 2

a) Conexión en serie:

Figura 1: Conexión en serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C}{2}$$

$$U = \frac{C V_0^2}{4}$$

Conexión en paralelo:

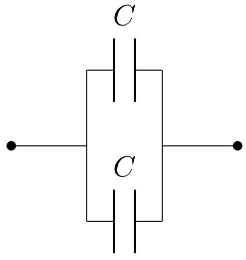


Figura 2: Conexión en paralelo

$$C_{eq} = C + C = 2C \Rightarrow U = C V_0^2$$

b) Serie:

$$C' = KC \Rightarrow V' = \frac{Q}{KC} \quad con \quad Q = C_{eq} V$$

$$\Rightarrow V' = \frac{C_{eq}}{KC} V_0 \quad con \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{KC} + \frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{KC}{K+1} \quad \Rightarrow V' = \frac{V_0}{K+1}$$

En paralelo el voltaje siempre será V_0

c) Planteando Kirchhoff y usando las capacitancias equivalentes, en ambos casos la ecuación de descarga resultante es:

$$\frac{Q}{C_{eq}} + \dot{Q}R = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{RC_{eq}} = \frac{\dot{Q}}{Q}$$

Para el caso en serie la frecuencia característica será $\frac{(K+1)}{RKC}$ y en paralelo $\frac{1}{(K+1)RC}$. Por lo tanto, los tiempos que demorarán en segundos son $(K+1)RC > \frac{RKC}{(K+1)}$. Será más rápido en serie.

Ejercicio 3

a) Para la parte 1, se tiene un circuito de una sola malla que consta de dos resistencias, R_1 y R_2, y una batería V. Aplicando Kirchhoff obtenemos

$$V = R_1 I + R_2 I \rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

b) En el instante $t = 0$, el capacitor está completamente descargado por lo que la diferencia de potencial entre sus placas es nula. Así, nos queda que las resistencias R_2 y R_3 estan en paralelo por lo que podemos hallar su equivalente R_{23}.

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \rightarrow R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Con la resistencia equivalente R_{23} calculada se tiene ahora un circuito de una sola malla compuesta por V, R_1 y R_{23}.

$$V = R_1 I + R_{23} I \rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_{23}} = \frac{V(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Si llamamos I_2 a la corriente que circula por la resistencia R_2 y recorremos la malla que comprende a la resistencia R_1 y R_2 (nos olvidamos de la equivalente R_{23}). Obtenemos que

$$V = R_1 I + R_2 I_2 \rightarrow I_2 = \frac{V - R_1 I}{R_2}$$

Con el I hallado en la parte anterior nos queda que

$$I_2 = \frac{V R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

c) Luego de suficiente tiempo, el condensador está cargado y no circula corriente por él. Su voltaje será igual al de R_2:

$$V_{R_2} = I R_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{V R_2 C_1}{R_1 + R_2}$$