Física 3 - Solución del examen

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

3 de agosto de 2021

Problema 1

a) El flujo de campo magnético se define como

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \hat{n}\ da$$

En este caso, utilizando la regla de la mano derecha, vemos que el campo magnético será entrante al plano de la espira. Su módulo puede determinarse aplicando la ley de Ampère a una espira amperiana circular $\mathcal{C}$ con un radio r concéntrica con el conductor, por lo que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B 2\pi r = \mu_0 I \quad \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}$$

Orientando la superficie de la espira en la misma dirección del campo tenemos que el flujo de campo magnético es

$$\Phi_B = a\int_c^{c+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}dr = \frac{\mu_0 a I}{2\pi}\ln\left(\frac{c+b}{c}\right)$$

b) Sabemos que, de acuerdo con la ley de Inducción de Faraday, como la corriente que circula por el conductor depende del tiempo, el flujo de campo magnético varía con el tiempo haciendo aparecer una fem sobre la espira que queda determinada por

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0}{2\pi}a\ln\left(\frac{c+b}{c}\right) I_0\exp\{-\lambda t\}\right]$$

$$\text{fem} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{c+b}{c}\right)\lambda I_0\exp\{-\lambda t\}$$

Como la normal de la superficie se tomó entrante al plano de la figura, la fem tiene sentido horario.

c) La aparición de la fem en la espira hace que por ella circule una corriente, y debido a la resisistencia R se disipará energía por efecto Joule. Como se desprecia la autoinductancia, la corriente por la espira es $i = \frac{\text{fem}}{R}$. Por lo tanto, la potencia disipada será

$$P = Ri^2 = \frac{\text{fem}^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 a I_0 \lambda}{2\pi}\ln\left(\frac{c+b}{c}\right)\right)^2 \exp\{-2\lambda t\}$$

Para calcular la energía total disipada integramos esta expresión entre $t = 0$ y $+\infty$

$$E = \int_0^{+\infty} P\ dt = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 a I_0 \lambda}{2\pi}\ln\left(\frac{c+b}{c}\right)\right)^2 \int_0^{+\infty} \exp\{-2\lambda t\}dt$$

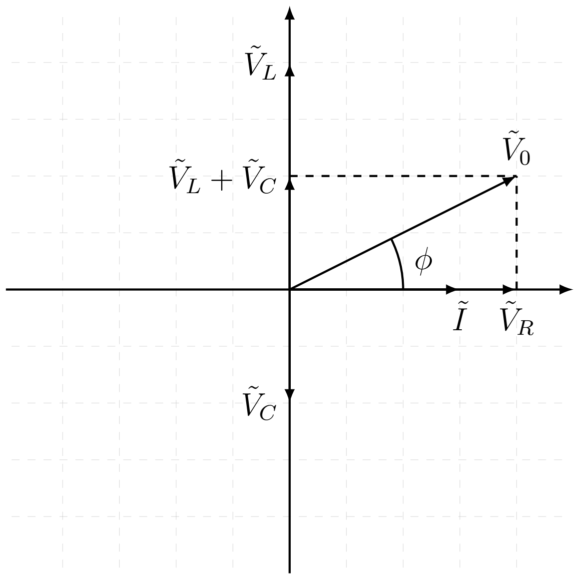
$$= \frac{1}{-2\lambda R}\left(\frac{\mu_0 a I_0 \lambda}{2\pi}\ln\left(\frac{c+b}{c}\right)\right)^2 \left[\exp\{-2\lambda t\}\Big|_0^{+\infty}\right]$$

Evaluando esta última expresión obtenemos

$$E = \frac{1}{2\lambda R}\left(\frac{\mu_0 a I_0 \lambda}{2\pi}\ln\left(\frac{c+b}{c}\right)\right)^2$$

Problema 2

a)
- El fasor asociado al voltaje en la resistencia está dado por $\tilde{V}_R = R\tilde{I}$, por lo que está **en fase** con la corriente.
- El fasor asociado al voltaje en el inductor está dado por $\tilde{V}_L = j\omega L\tilde{I}$, por lo que está **adelantado** un ángulo de $\pi/2$ respecto a la corriente.
- El fasor asociado al voltaje en el capacitor está dado por $\tilde{V}_C = -j\frac{1}{\omega C}\tilde{I}$, por lo que está **atrasado** un ángulo de $\pi/2$ respecto a la corriente.
- El fasor asociado al voltaje en la fuente es la suma compleja de $\tilde{V}_R$, $\tilde{V}_L$, y $\tilde{V}_C$.



b) La corriente está dada por

$$\tilde{V}_0 = Z\tilde{I},$$

donde Z es la impedancia total del circuito, que al estar todos los elementos en serie, es la suma de las impedancias de cada uno de ellos

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

La amplitud de la corriente es entonces

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

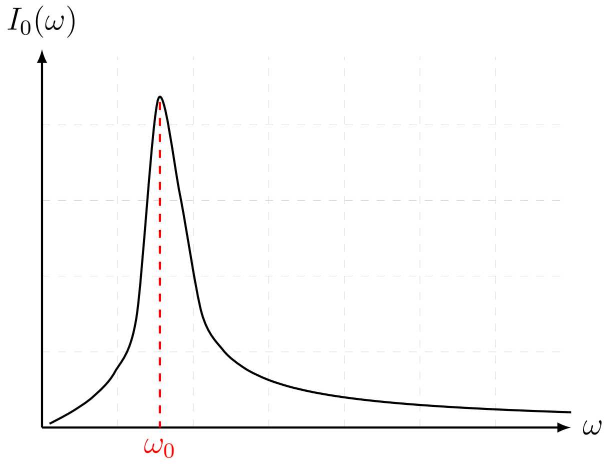
Escribiendo la impedancia como $Z = |Z|e^{i\theta}$, tenemos que

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_0}{|Z|}e^{-i\theta},$$

por lo que el desfasaje de la corriente con el voltaje en la fuente es

$$\phi = -\theta = -\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}Z}{\mathrm{Re}Z}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

c) Graficamos la amplitud de la corriente a partir de la expresión calculada en la parte anterior del ejercicio



El máximo se da cuando el denominador en I_0 es mínimo, lo cual ocurre cuando la parte imaginaria de la impedancia se anula, es decir

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esta es la frecuencia de resonancia del circuito. Además de maximizar la amplitud de la corriente, en esta frecuencia tenemos que $\phi = 0$, es decir, el fasor de corriente es colineal al del voltaje en la fuente.

d) La amplitud máxima de la corriente es

$$I_0^{\max} = I_0(\omega_0) = \frac{V_0}{R}.$$

Buscamos entonces los valores de ω donde

$$I(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{2}R} \Rightarrow \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}R} \Rightarrow \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2$$

Tomando la raíz obtenemos

$$L\omega^2 \pm R\omega - \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\pm R \pm \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{2L}$$

De las cuatro soluciones posibles, hay dos que son negativas: la que tiene dos signos de $-$, y la que tiene primero un $+$ y segundo un $-$, ya que la raíz es mayor a R. Nos quedamos sólo con las soluciones que dan frecuencias positivas

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}, \qquad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

El ancho de banda es

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

e) Conocemos el ancho de banda, que es $\Delta\omega = 1000\,\text{rad/s}$, por lo que podemos escribir la resistencia en términos de la inductancia

$$R = L\Delta\omega$$

Por otro lado, si sumamos las frecuencias de corte $\omega_{1,2}$

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \Rightarrow \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{4} = \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}$$

De esta ecuación y la anterior, tenemos que

$$\frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{4} = \frac{\Delta\omega^2}{4} + \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{4}{C\left[(\omega_1 + \omega_2)^2 - \Delta\omega^2\right]} = \frac{1}{C\omega_1\omega_2}$$

Sustituyendo por los valores de las frecuencias de corte y la capacitancia

$$L = 30.3\,\text{mH} \qquad R = 30.3\,\Omega$$

Problema 3

a) Comencemos calculando el potencial de un aro de radio s y densidad lineal $\eta = \frac{q}{2\pi s}$ en un punto del eje a altura z

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\eta s d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q d\theta}{4\pi\varepsilon_0 2\pi\sqrt{z^2 + s^2}}$$

siendo θ el ángulo polar y r la distancia desde el diferencial de carga dq al punto de evaluación del potencial. Integrando,

$$V_{\text{aro}}(z) = \int_0^{2\pi} dV = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + s^2}}$$

Consideramos el anillo como la integración de muchos aros de espesor ds. Utilizando el resultado anterior, el potencial de un sólo aro es

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + s^2}} = \frac{\sigma 2\pi s ds}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + s^2}}$$

$$V_{\text{anillo}}(z) = \int_{2R/3}^{R} \frac{\sigma s ds}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2 + s^2}}$$

Realizando el cambio de variable $u = z^2 + s^2$, $du = 2sds$

$$V_{\text{anillo}}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{z^2+\frac{4}{9}R^2}^{z^2+R^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2 + \tfrac{4}{9}R^2}\right)$$

b) Para calcular la fuerza sobre la barra, primero debemos calcular el campo eléctrico sobre el eje z. Por simetría $\vec{E}_{eje} = E(z)\hat{z}$, entonces

$$\vec{E}_{\text{eje}} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \frac{4}{9}R^2}}\right)\hat{z}$$

Ahora integramos para calcular la fuerza:

$$\vec{F} = \int dq\vec{E} = \int_0^D \lambda dz E(z)\hat{z} = -\lambda\int_0^D dz\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = -\lambda V(z)\hat{z}\Big|_0^D$$

$$\vec{F} = -\lambda\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{D^2 + R^2} - \sqrt{D^2 + \frac{4}{9}R^2} - \frac{1}{3}R\right)\hat{z}$$

c) El trabajo está dado por

$$W = \int \vec{F} \cdot d\hat{z} = \int F_z \, dz$$

dz es positivo, por lo tanto, el signo de W está determinado por el signo de F_z.

- El signo de F_z es positivo si λ y σ son de igual signo.
- El signo de F_z es negativo si λ y σ son de diferente signo.