Física 3, examen 23/7/19

Solución Ejercicio 1

a) Por Ley de Gauss, la carga contenida en el cubo es $q = \varepsilon_0 \Phi_E$; donde Φ_E es el flujo de campo eléctrico a través de la superficie del cubo.

Recordemos que el flujo es $\Phi_E = \oint \overrightarrow{E} \cdot (dA\hat{n})$, con $\hat{n}$ la normal saliente a la superficie.

Comencemos calculando el flujo en las caras paralelas al plano yz, que se encuentran en $x = 1m$ y $x = -1m$ y cuyas normales se corresponden con $\hat{\imath}$ y $-\hat{\imath}$, respectivamente. Dado que el campo $\overrightarrow{E}$ sólo tiene componentes según $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, el producto $\overrightarrow{E} \cdot \hat{n}$ es nulo en ambas caras.

Sigamos con las caras paralelas al plano xy, que se encuentran en $z = 1m$ y $z = -1m$ y sus normales coinciden con $\hat{k}$ y $-\hat{k}$, respectivamente. Considerando que $\hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$, y $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$, tenemos

$\Phi_{cara\ z=1} = \int\int \left(4y\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \cdot \hat{k}\,(dxdy) = 5\frac{V}{m} \int\int dxdy = 20Vm.$

$\Phi_{cara\ z=-1} = \int\int \left(4y\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \cdot \left(-\hat{k}\right)(dxdy) = -5\frac{V}{m} \int\int dxdy = -20Vm.$

Restan las caras paralelas al plano xz. Se encuentran en $y = 1m$ y $y = -1m$ y sus normales se corresponden con $\hat{\jmath}$ y $-\hat{\jmath}$, respectivamente. Considerando que $\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1$, y $\hat{k} \cdot \hat{\jmath} = 0$, tenemos

$\Phi_{cara\ y=1} = \int\int \left(4\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \cdot \hat{\jmath}\,(dxdz) = 4\frac{V}{m} \int\int dxdy = 16Vm.$

$\Phi_{cara\ y=-1} = \int\int \left(-4\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \cdot \left(-\hat{\jmath}\right)(dxdz) = 4\frac{V}{m} \int\int dxdy = 16Vm.$

Entonces, el flujo total es $\Phi_E = 20Vm - 20Vm + 16Vm + 16Vm = 32Vm$ y la carga contenida en el cubo $q = \varepsilon_0 \Phi_E = 2,8 \times 10^{-10}C$.

b) La diferencia de potencial entre dos puntos arbitraris de una misma arista paralela al eje x es

$\Delta V = -\int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{x} = -\int \left(4y\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \cdot \left(dx\hat{\imath}\right) = 0$, ya que $\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$

Entonces el potencial eléctrico es constante sobre cualquier arista paralela al eje x.

c) $\Delta V = -\int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{y} = -\int \left(4y\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \cdot \left(dy\hat{\jmath}\right) = -\int_{y=-1m}^{y=1m} 4ydy = -\left. 4\frac{y^2}{2} \right|_{y=-1m}^{y=1m} = -2V + 2V = 0V.$

d) En el origen de coordenadas el campo es $\overrightarrow{E} = 5\frac{V}{m}\hat{k}$, y la fuerza eléctrica $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = +8,0 \times 10^{-19} N\,\hat{k}$.

Por lo tanto, el protón estará sometido a una aceleración $\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F}}{m} = 4,8 \times 10^{8}\,\frac{m}{s^2}\hat{k}$, constante en todo el eje z.

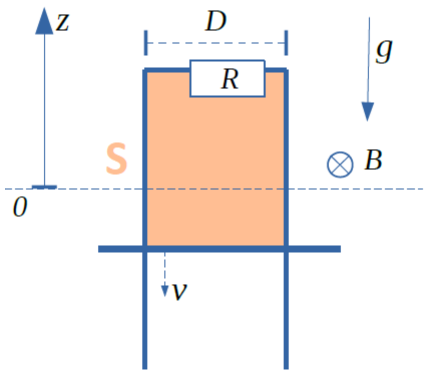
Si parte del reposo, saldrá por el centro de la cara superior ($z = 1m$), a una velocidad $\overrightarrow{v} = 3,1 \times 10^{4}\,\frac{m}{s}\,\hat{k}$.

Examen Física 3: Solución

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

23 de julio de 2019

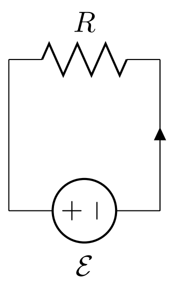
Ejercicio 2



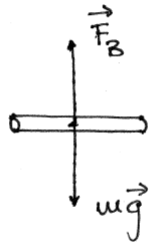
a) Sea S la superficie de la figura orientada con normal entrante. Esta elección es coherente con una circulación de su borde en sentido horario.

$$\phi_B(s) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_S B \cdot dA = B \iint_S dA = BDz$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -BD\frac{dz}{dt} = -BDv_L$$



$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BDv_L}{R}$$



$$\vec{v} = \text{cte} \Longrightarrow mg = F_B = BDi = BD\frac{BDv_L}{R} = \frac{(BD)^2 v_L}{R} \Longrightarrow$$

$$\boxed{v_L = \frac{mgR}{(BD)^2}}$$

b)

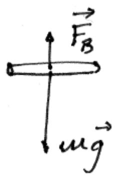
$$P_R = Ri^2 = R\left(\frac{BDv_L}{R}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{P_R = \frac{(BDv_L)^2}{R}}$$

c) Razonando análogamente a la parte **(a)**, la corriente por la barra es

$$i = \frac{BDv}{R}$$

Donde ahora $v = v(t)$.



$$mg - F_B = mg - \frac{(BD)^2}{R}v = m\dot{v} \Longrightarrow$$

$$\dot{v} + \frac{(BD)^2}{mR}v = g \tag{1}$$

La solución a (1) para condición inicial $v(0) = 0$ es

$$\boxed{v(t) = \frac{mgR}{(BD)^2}\left(1 - e^{-\frac{(BD)^2}{mR}t}\right)}$$

Notar que $\lim_{t\to\infty} v(t) = v_L$, como era de esperarse.

Física 3. Examen 23/7/19

Solución Ejercicio 3.

a) $\Phi = L\,sen(\theta)\dfrac{2\pi}{\lambda}$

Para ángulos pequeños:

$$sen(\theta) \simeq \theta \simeq \frac{\Phi\lambda}{2\pi L}$$

b) $\Delta\theta \simeq \dfrac{\Delta\Phi\lambda}{2\pi L}$

Sea D el diámetro del anillo que rodea el agujero negro y Z la distancia entre la Tierra y el agujero negro.

$$D \simeq Z\,\Delta\theta \simeq Z\frac{\Delta\Phi\lambda}{2\pi L}$$

Para Z = 55 x 10^6 años luz, $\Delta\Phi = 6$ rad, $\lambda = 1{,}3\,x\,10^{-3}$ m, $L = 6{,}5\,x\,10^{6}$ m, tenemos:

$D = 1{,}0\,x\,10^{-2}$ años luz (~10^{11} km, ~ 700 veces la distancia Sol - Tierra).