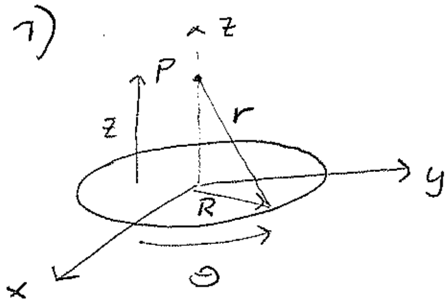
Ejercicio 1

1) 

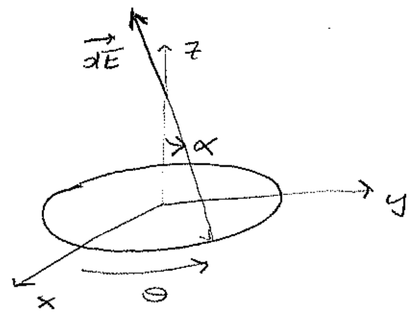
La contribución de un elemento de curva $R d\theta$ al potencial es:

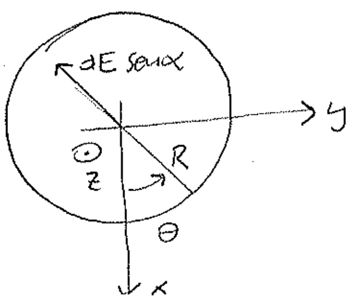
$$dV = \frac{\lambda(\theta)\, R\, d\theta}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r = \sqrt{R^2+z^2}$$

$$\Rightarrow V(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda(\theta) R\, d\theta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$$

2) $\vec{E}(z) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$

$E_z = -\dfrac{dV(z)}{dz} = 0$; para E_x, E_y no puedo derivar un potencial que está calculado para valores particulares: $x=y=0 \Rightarrow$ contribución a E_x, E_y de $R d\theta$:

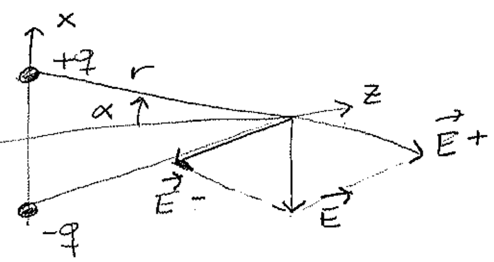




$\left(\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{R}{r}\right)$

$$E_{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda(\theta) \operatorname{sen}\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix} R\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \cos\theta\, R^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix} d\theta$$

$$= -\frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \begin{Bmatrix} \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta}^{=\pi} \\ \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{=0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\pi\lambda_0 R^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3) 

$$\vec{E} = -2\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \operatorname{sen}\alpha\, \hat{x}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{(d/2)}{r}$$

$$r^2 = z^2 + (d/2)^2$$

$$\vec{E} = \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0 \left((d/2)^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{x}$$

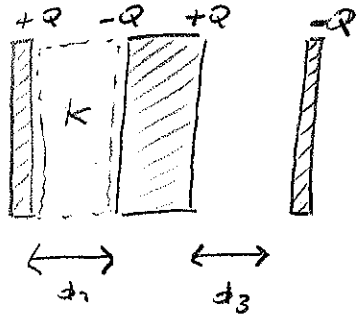
, que iguala al resultado de la parte 2) para:

$$d = 2R, \quad q = \frac{1}{2}\pi R \lambda_0$$

Ejercicio 2

1) El cilindro y el tubo están conectados en paralelo, por lo que la resistencia del arreglo verifica:

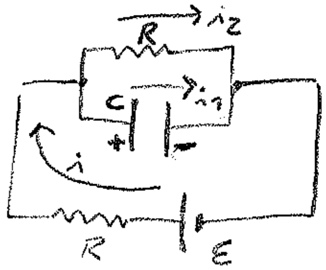
$$R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} \quad , \text{ siendo } R_1 = \frac{\rho_1 L}{\pi r_1^2} \quad , \quad R_2 = \frac{\rho_2 L}{\pi (r_3^2 - r_2^2)}$$

2) 

El arreglo corresponde a 2 capacitores en serie:

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

con $C_1 = \dfrac{K\epsilon_0 A}{d_1}$, $C_2 = \dfrac{\epsilon_0 A}{d_3}$

3) 

ley de nodos: $i = i_1 + i_2$ (I)

ley de mallas: $\mathcal{E} = Ri + \dfrac{Q}{C}$ (II)

$$\frac{Q}{C} = Ri_2 \quad \text{(III)}$$

Sustituyendo (I) y (III) en (II):

$$\mathcal{E} = R\left(i_1 + \frac{Q}{RC}\right) + \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} = i_1 + \frac{2Q}{RC}$$

usando luego la relación entre i_1 y Q: $\dot{Q} = i_1$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} = \dot{Q} + \frac{2Q}{RC} \text{ , con: } Q(0) = 0$$

La solución a la ec. diferencial anterior es: $Q(t) = \dfrac{\mathcal{E}C}{2}\left(1 - e^{-2t/RC}\right)$

$$\Rightarrow i = i_1 + i_2 = \dot{Q} + \frac{Q}{RC} = \boxed{\frac{\mathcal{E}}{2R}\left(1 + e^{-2t/RC}\right)}$$