Corrección del exámen de diciembre de Física 3

Diciembre 2022

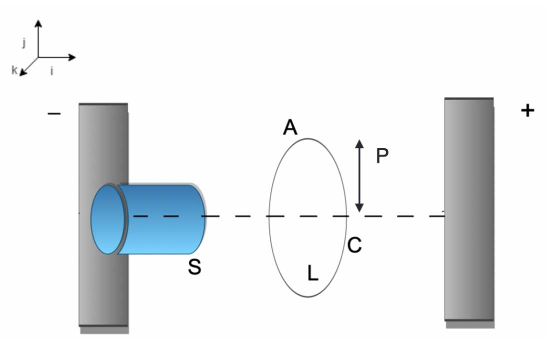
Problema 1

a) Utilizando la ley de mallas se tiene la siguiente expresión: $\frac{q}{C} = Ri$. Además. $i = -\frac{dq}{dt}$ luego: $\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$

Integrando ambas parte se obtiene:

$\int_{q(0)}^{q(t)} \frac{dq}{q} = \int_0^t -\frac{dt}{RC} \to Ln(\frac{q(t)}{q_0}) = -\frac{t}{RC} \to q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ Como en $t = 0$ el voltaje entre los bornes del capacitor es V se tiene que $q_0 = VC$. Y como ya fue mencionado $i = -\frac{dq}{dt}$, por lo que $i(t) = \frac{V}{R} e^{\frac{-t}{RC}}$

b) Para aplicar Gauss en el capacitor se toma una superficie gausseana cilíndrica como muestra la figura:



Por Gauss: $\int_S \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$

La densidad superficial de carga en función del tiempo en una de las placas es:

$\sigma(t) = \frac{q(t)}{r^2.\pi} = \frac{VCe^{-\frac{t}{RC}}}{r^2.\pi}$

$\int_{Cilindro} \vec{E}.\vec{ds} = \int_{ParedLateral} \vec{E}.\vec{ds} + \int_{TapaIzquierda} \vec{E}.\vec{ds} + \int_{TapaDerecha} \vec{E}.\vec{ds}$

dónde, la integral sobre la pared lateral es 0 pues el campo eléctrico es perpendicular al diferencial de superficie, la integral sobre la tapa izquierda también es 0 pues no hay campo fuera del capacitor. Luego:

$\int_{Cilindro} \vec{E}.\vec{ds} = \int_{TapaDerecha} \vec{E}.\vec{ds}$

Debido a la simetría presente en el problema el campo es constante sobre la tapa derecha de la superficie S y el ángulo que este forma con el diferencial de superficie es 180. Luego:

$\int_{TapaDerecha} \vec{E}.\vec{ds} = -E \int_{TapaDerecha} ds = -Er^2\pi$

Se aplica Gauss:
$-Er^2\pi = \frac{q_{int}(t)}{\epsilon_0} \to E = -\frac{q_{int}}{\epsilon_0 r^2 \pi}$ dónde, $\frac{q_{int}(t)}{\epsilon_0 r^2 \pi} = -\sigma(t)$ pues la carga encerrada en S es negativa, luego:
$\vec{E} = -\frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}\vec{i} = -\frac{VCe^{-\frac{t}{RC}}}{\epsilon_0 r^2 \pi}\vec{i}$

Por Ampere-Maxwell, dado que no hay corriente de carga entre las placas, se tiene:

$\int_C \vec{B}\vec{dC} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

Como para un tiempo t dado el campo es uniforme en cualquier punto dentro del capacitor, se tiene:
$\Phi_E = E(t)p^2\pi = \frac{VCe^{-\frac{t}{RC}} p^2 \pi}{\epsilon_0 r^2 \pi}$
Por lo tanto: $\frac{d\Phi_E}{dt} = -\frac{VCp^2 e^{-\frac{t}{RC}}}{\epsilon_0 r^2 RC}$

Observar que la corriente de desplazamiento tendrá la misma dirección que la corriente de carga que llega al condensador, luego se define el sentido de la curva C para que la normal a la superficie L delimitada por C sea colineal con la corriente de desplazamiento. Observar que este sentido será el mismo al sentido del campo magnético, por lo tanto el campo magnético es colineal al diferencial de curva $\vec{dC}$ además su módulo es constante sobre toda la curva C, por lo tanto:

$\int_C \vec{B}\vec{dC} = \int_C BdC = B\int_C dC = B2p\pi$

Y por Ampere-Maxwell: $B2p\pi = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

Por lo tanto: $\vec{B} = \frac{\mu_0 VCpe^{-\frac{t}{RC}}}{r^2 RC\pi 2}\vec{e_r}$

donde $\vec{e_r}$ es el versor saliente por arriba y entrante por abajo. Luego en el punto A el campo magnético es el siguiente: $\vec{B} = \frac{\mu_0 VCpe^{-\frac{t}{RC}}}{r^2 RC\pi 2}\vec{k}$

c) i. Por conservación de la carga en el sistema compuesto por ambos capacitores y debido a que ambos capacitores son iguales, al llegar al equilibrio la carga en cada capacitor será igual. Por lo tanto la carga en ambos capacitores vale: $q_{capacitor} = \frac{VCe^{-\frac{T_1}{RC}}}{2}$

ii. La energía disipada por R' será la diferencia de energía potencial del sistema entre el instante $t = T_1$ y un instante muy posterior, esto es:

$U_i = \frac{V^2Ce^{\frac{-2T_1}{RC}}}{2}$

$U_f = \frac{V^2Ce^{\frac{-2T_1}{RC}}}{4}$

Luego la energía total disipada por R' será: $\frac{V^2Ce^{\frac{-2T_1}{RC}}}{4}$

Problema 2

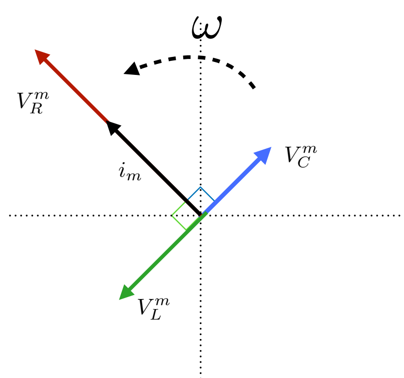


Figura 1: El diagrama fasorial del circuito. V_R^m, V_C^m y V_L^m son los valores máximos de los voltajes para la resistencia, el capacitor y el inductor.

a) El diagrama fasorial se muestra en la figura.

El voltaje sobre la resistencia es $V_R(t) = i(t)R$, por lo tanto, la resistencia está en fase con la corriente, es decir, $V_R(t)$ y $i(t)$ alcanzan sus respectivos máximos V_R^m y i_m al mismo tiempo.

El voltaje a través del inductor es $V_L(t) = L\frac{\partial i(t)}{\partial t} = \omega L i_m \cos(\omega t - \phi)$. Usando $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ tenemos $V_L(t) = \omega L i_m \sin(\omega t - \phi + \pi/2)$. Vemos que la corriente se retrasa con respecto al voltaje a través del inductor en $\pi/2$ o 90 grados.

El voltaje a través del conductor es $V_C(t) = q(t)/C$ entonces $V_C(t) = i_m \int dt \sin(\omega t - \phi) = -\frac{i_m}{C} \cos(\omega t - \phi)$. Entonces podemos usar que $-\cos(x) =$

$\sin(x-\pi/2)$, llegando a $V_C(t) = \frac{i_m}{C}\cos(\omega t - \phi - \pi/2)$. Por lo tanto, la corriente adelanta el voltaje a través del capacitor en 90 grados.

b) Dado que la corriente se adelanta en 90 grados, la diferencia de tiempo es $T/4 = 10^{-3}s$ donde T es el período. Entonces $T = \frac{1}{250}s$ y $f = 1/T =$ 250Hz.

c) El capacitor y el inductor están desfasados medio ciclo por lo que el tiempo entre los máximos es $T/2 = 0{,}2 \times 10^{-2}s$

d) La frecuencia angular es $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 250\text{Hz}$. Entonces tenemos $X_L = \omega L = 2\pi \times 250 \times 30 \times 10^{-3}\Omega = 15\pi\Omega$ y $X_C = 1/(\omega C) = 1/(2\pi \times 250 \times 30 \times 10^{-6})\Omega = 200/(3\pi)\Omega$. Podemos usar la relación $\tan(\phi) = (X_L - X_C)/R = 1{,}0$ para determinar que $\tan\phi = 1{,}0$. Por lo tanto $\phi \approx \pi/4$ o 45 grados. Entonces, la corriente está retrasada con respecto a la fem en 45 grados.

e) De la nueva frecuencia $f' = f/2 = 125\text{Hz}$ o $\omega' = \omega/2 = 2\pi \times 125\text{Hz}$. Se tiene entonces que $X'_L = X_L/2 = 15\pi/2\,\Omega$ y $X'_C = 2X_C = 400/(3\pi)\Omega$. Ahora sabemos que $Z' = \sqrt{R^2 + (X'_L - X'_C)^2} = 32{,}1\Omega$ y $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 36,7\Omega$. Como E_m no depende de la frecuencia tenemos que $E_m = E'_m = i'_m Z' = 9{,}64V$.

Problema 3

a) Dada la definición de θ, el ángulo que forma un vector normal al plano de la bobina, el flujo magnético a través de una espira de la bobina es

$$\Phi_B = B\,a\,b\,\cos\theta. \tag{1}$$

El flujo magnético total a través de la bobina es N veces el de una espira. Como en $t = 0$ θ vale cero y la velocidad angular es constante, se tiene, entonces que

$$\theta = \omega t. \tag{2}$$

Por Faraday, y dadas las convenciones de signo presentes en la figura, que hacen que el vector normal esté orientado según la regla de la mano derecha en relación al sentido elegido para la corriente, la fem inducida es

$$\mathcal{E}_{ind} = -N\,\frac{d\Phi_B}{dt} = N\,a\,b\,B\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{3}$$

Utilizando la resistencia de la bobina, la ley de mallas en la bobina da:

$$i_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{N\,a\,b\,B\,\omega}{R}\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{4}$$

El signo de la corriente queda determinado por la Ley de Faraday incluyendo signos dadas las convenciones antes señaladas. Alternativamente, el signo de la corriente puede determinarse utilizando la ley de Lenz con idéntico resultado.

b) La potencial disipada en al bobina es

$$\mathcal{P} = R\, i^2 = \frac{N^2\, a^2\, b^2\, B^2\, \omega^2}{R} \operatorname{sen}^2(\omega t). \tag{5}$$

La potencia media es, por tanto,

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{N^2\, a^2\, b^2\, B^2\, \omega^2}{R} \langle \operatorname{sen}^2(\omega t) \rangle = \frac{N^2\, a^2\, b^2\, B^2\, \omega^2}{2R}. \tag{6}$$

c) Para que la velocidad angular se mantenga constante el torque aplicado por el agente externo tiene que ser opuesto al provocado por la fuerza magnética. La fuerza magnética sobre un hilo de corriente es

$$\vec{F}_B = i\vec{L} \wedge \vec{B} \tag{7}$$

dónde el vector $\vec{L}$ tiene módulo igual al largo del segmento de cable, es paralelo a este y está dirigido con el sentido de la corriente. Las fuerzas magnéticas generadas sobre dos de los cuatro segmentos de cada espira son paralelas al eje de rotación y por ende no generan torque. Los otros dos segmentos son perpendiculares a $\vec{B}$ en todo instante y generan fuerzas opuestas de módulo

$$F_B^{1segmento} = |i| bB\,. \tag{8}$$

Por ende el torque provocado por cada una de esas fuerzas es idéntico y el torque total (incluyendo las N espiras) es:

$$\tau_B = -i\, a\, b\, B\, N \operatorname{sen}\theta = -B^2 \frac{N^2\, a^2\, b^2\, \omega}{R} \operatorname{sen}^2(\omega t). \tag{9}$$

El signo traduce el hecho que el torque es *restaurador*. Es decir, si $\theta > 0$ la aceleración angular provocada por el torque magnético es negativa. El torque que debe ser aplicado por el agente externo es, en consecuencia:

$$\tau_{ext} = B^2 \frac{N^2\, a^2\, b^2\, \omega}{R} \operatorname{sen}^2(\omega t). \tag{10}$$