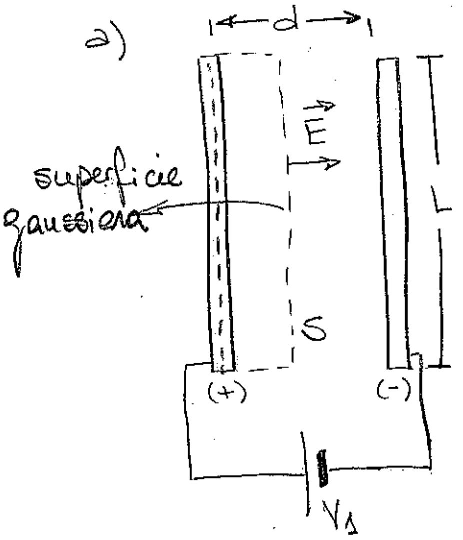
Física 3 - Primer Parcial (Solución)
26 de setiembre de 2019

(1) $d \ll L \rightarrow$ despreciamos efectos de borde.

a)



- Ley de Gauss $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ ← carga libre encerrada por la superficie cerrada S

$$E L^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 L^2} \quad (1)$$

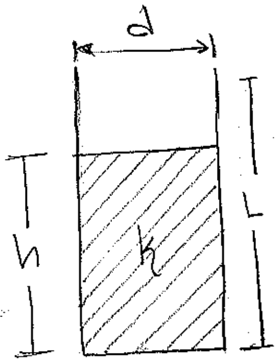
- $V_1 = \int_{(+)}^{(-)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E d \quad (2)$

- $V_1 = \frac{q}{C_0} \quad (3)$

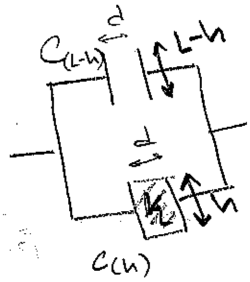
Igualando (2) y (3): $Ed = \frac{q}{C_0}$ y sustituyendo (1):

$$\frac{\cancel{q} d}{\varepsilon_0 L^2} = \frac{\cancel{q}}{C_0} \rightarrow \boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}}$$

b)



(equivale a dos capacitores en paralelo) →



$$C_{eq} = C_{(L-h)} + C_{(h)} = \frac{\varepsilon_0 L (L-h)}{d} + k \frac{\varepsilon_0 h L}{d} = \frac{\varepsilon_0 L}{d}\left[L + h(k-1)\right]$$

$$\boxed{V_2 = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{V_1 C_0}{C_{eq}} = V_1 \frac{\cancel{\varepsilon_0} L^{\cancel{2}}}{\cancel{d}} \frac{\cancel{d}}{\cancel{\varepsilon_0} \cancel{L}\left[L + h(k-1)\right]} = \left[\frac{L}{L + h(k-1)}\right] V_1}$$

c) - Capacitor $C_{(h)}$: $q_{(h)} = \sigma_{(h)} (hL) \rightarrow \sigma_{(h)} = \frac{C_{(h)} V_2}{hL}$

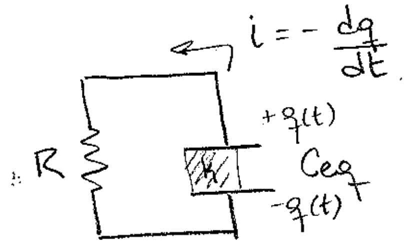
$$\boxed{\sigma_{(h)} = \frac{k \varepsilon_0 \cancel{hL}}{d \cancel{hL}} V_2 = \frac{k \varepsilon_0}{d}\left[\frac{L}{L + h(k-1)}\right] V_1}$$

- Capacitor $C_{(L-h)}$: $q_{(L-h)} = \sigma_{(L-h)} L (L-h) \rightarrow \sigma_{(L-h)} = \frac{C_{(L-h)} V_2}{L(L-h)}$

$$\boxed{\sigma_{(L-h)} = \frac{\varepsilon_0 \cancel{L(L-h)}}{d} \frac{V_2}{\cancel{L(L-h)}} = \frac{\varepsilon_0 V_2}{d} = \frac{\varepsilon_0}{d}\left[\frac{L}{L + h(k-1)}\right] V_1}$$

d) Sea $t=0$ el tiempo en que se conecta el capacitor a la resistencia R.

Descarga del capacitor con carga inicial q_0



Energía eléctrica acumulada en el capacitor $\Rightarrow U(t) = \frac{q^2(t)}{2C_{eq}}$

el valor de U cae a la mitad cuando el valor de q cae a $1/\sqrt{2}$

$$\frac{q}{C_{eq}} - Ri = 0 \rightarrow \frac{q}{C_{eq}} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC_{eq}} \int_0^t dt \rightarrow$$

* busco t^* tal que:

$$\ln\left(\frac{q_0/\sqrt{2}}{q_0}\right) = -(RC_{eq})^{-1} t^*$$

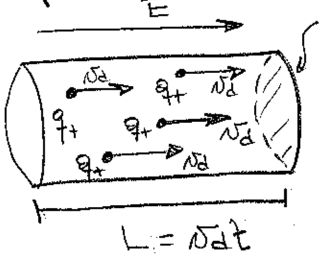
$$\cancel{-}\ln(\sqrt{2}) = \cancel{-}(RC_{eq})^{-1} t^*$$

$$\Rightarrow \boxed{t^* = RC_{eq} \ln(\sqrt{2})}$$

(2) a) n = número de portadores por unidad de volumen

q_+ = carga de un portador (en este caso la asumimos positiva)

Debido al campo eléctrico $\vec{E}$, los portadores de carga q_+ adquieren una velocidad de arrastre $\vec{v}_d$, estableciéndose una corriente i de densidad de corriente $\vec{j}$ a través de la sección A del material en un tiempo dt:



Consideremos una porción diferencial del material de volumen $dV = AL$

$dV = A(v_d dt)$

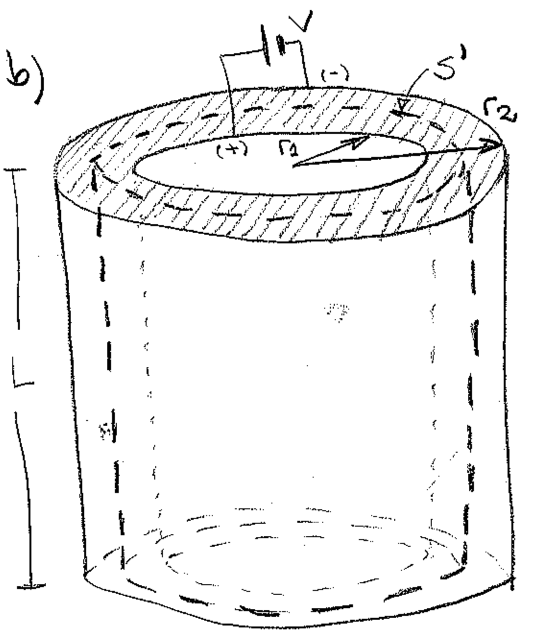
En dt pasan $dq = (nq_+) A(v_d dt)$ cargas a través de la sección A

$$\Rightarrow j = \frac{i}{A} = \frac{dq/dt}{A} = nq_+ v_d = (nq_+\gamma)E$$

$v_d = \gamma E$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}} \quad \text{con} \quad \boxed{\sigma = nq_+\gamma}$$

b)



$$R = \frac{V}{i} \quad (*)$$

medio óhmico

$$\cdot\; i = \int_{S'} \vec{j}\cdot d\vec{A} = \int_{S'} \sigma\vec{E}\cdot d\vec{A} = \sigma E(r)(2\pi r L)$$

superficie cilíndrica de largo L y radio r ($r_1 < r < r_2$), sin tapas

$$E(r) = \frac{i}{\sigma 2\pi r L}$$

$$\cdot\; V = \int_{(+)}^{(-)} E\,dr = \frac{i}{\sigma 2\pi L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{i}{\sigma 2\pi L}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Sustituyendo en (*):

$$\boxed{R = \frac{V}{i} = \frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

— x —