Física 3 - Solución segundo parcial

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

Julio de 2021

Ejercicio 1

a) Para hallar la f.e.m. inducida comenzamos por hallar el flujo magnético a través de la espira conformada por la barra y las tres varillas:

$$\Phi_B = B(x + l_0)L$$

Luego utilizamos la ley de inducción de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BL\frac{dx}{dt}$$

siendo $\frac{dx}{dt} = v_x$ lz componente de la velocidad segÃºn x.

Como despreciamos la autoinducción del circuito

$$\mathcal{E} = Ri(t),$$

de lo que se deduce

$$i(t) = -\frac{BL}{R}\frac{dx}{dt}$$

b) Para hallar la ecuación de movimiento de la barra debemos hallar la fuerza magnética sobre la barra que sólo tiene componente horizontal y vale:

$$F_B^x = LBi(t) = -\frac{B^2L^2}{R}\frac{dx}{dt}$$

Podemos entonces reemplazar en la segunda ley de Newton cuya única componente no nula da:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{resorte}^x + F_B^x = -kx - \frac{B^2L^2}{R}\frac{dx}{dt}$$

c) Para verificar la forma de la ley horaria derivamos dos veces la expresión propuesta y sustituimos en la ecuación de movimiento:

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{-\gamma t}[-\gamma cos(\omega_0 t + \theta) - \omega_0 sen(\omega_0 t + \theta)]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ae^{-\gamma t}[\gamma^2 cos(\omega_0 t + \theta) + 2\omega_0\gamma sen(\omega_0 t + \theta) - \omega_0^2 cos(\omega_0 t + \theta)]$$

Sustituyendo:

$$m(\gamma^2 - \omega_0^2)cos(\omega_0 t + \theta) + 2w_0\gamma m sen(\omega_0 t + \theta) = -kcos(\omega_0 t + \theta) + b(\gamma cos(\omega_0 t) + \omega_0 sen(\omega_0 t))$$

$$\begin{cases} m(\gamma^2 - \omega_0^2) = -k + \gamma b \\ 2\omega_0\gamma m = b\omega_0 \end{cases}$$

Por lo que $k = m(\gamma^2 + \omega_0^2)$ y $b = 2\gamma m$
Se concluye entonces que :

$$w_0^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$$
$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

La solución es general (si se verifica la condición de consistencia $\omega_0^2 > 0$) pues, dado que la ecuación de movimiento es de segundo orden, basta con determinar dos constantes libres (que en este caso son la amplitud A y la fase θ en el t=0).

La condición de consistencia $\omega_0^2 > 0$ no es otra cosa que $k > b^2/(4m)$ que es la condición que se supone en la letra.

Ejercicio 2

El fasor asociado a la fuente es $\tilde{V}_f = V_0$.

a) La diferencia de potencial entre los nodos que determinan el comienzo de cada rama es la misma e igual a la que entrega la fuente ya que está conectado en paralelo. Sabemos que $\tilde{I}$ "la corriente por la fuente"satisface $\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2$.
Llamamos $\tilde{Z}_1$ a la impedancia equivalente de la rama que tiene a R_1 y al capacitor.
Entonces:

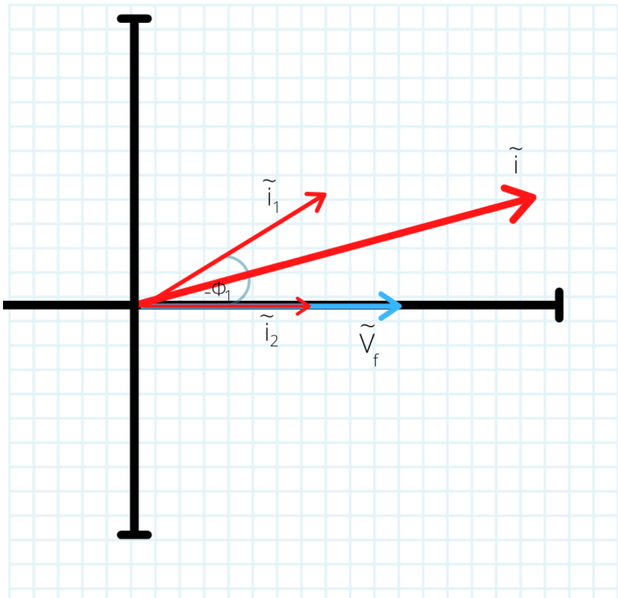
$$\tilde{Z}_1 = R_1 - \frac{j}{\omega C} = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{j\phi_1}$$

con $\phi_1 = \text{Arctan}(\frac{-1}{\omega C R_1})$. Análogamente para la rama con la resistencia R_2 la impedancia es $\tilde{Z}_2 = R_2$. Teniendo en cuenta que $\tilde{V} = \tilde{I}\tilde{Z}$ y que $Arctan(-x) = -Arctan(x)$ hallamos las corrientes:

$$\tilde{V}_1 = \tilde{Z}_1 \tilde{I}_1 \quad \to \tilde{I}_1 = V_0 \frac{\omega C}{\sqrt{(R_1 \omega C)^2 + 1}} e^{j\ Arctan(\frac{1}{\omega C R_1})}$$

siendo el módulo $\frac{V_0 \omega C}{\sqrt{(R_1 \omega c)^2 + 1}}$ y el desfasaje $Arctan(\frac{1}{\omega C R_1})$.

Para $\tilde{I}_2$, $\tilde{V} = \tilde{I}_2 \tilde{Z}_2$. Entonces $\tilde{I}_2 = \frac{V_0}{R}$ por lo que el módulo es $\frac{V_0}{R}$ y el desfasaje es nulo respecto de la fuente.
b) El diagrama fasorial correspondiente al circuito es el siguiente:

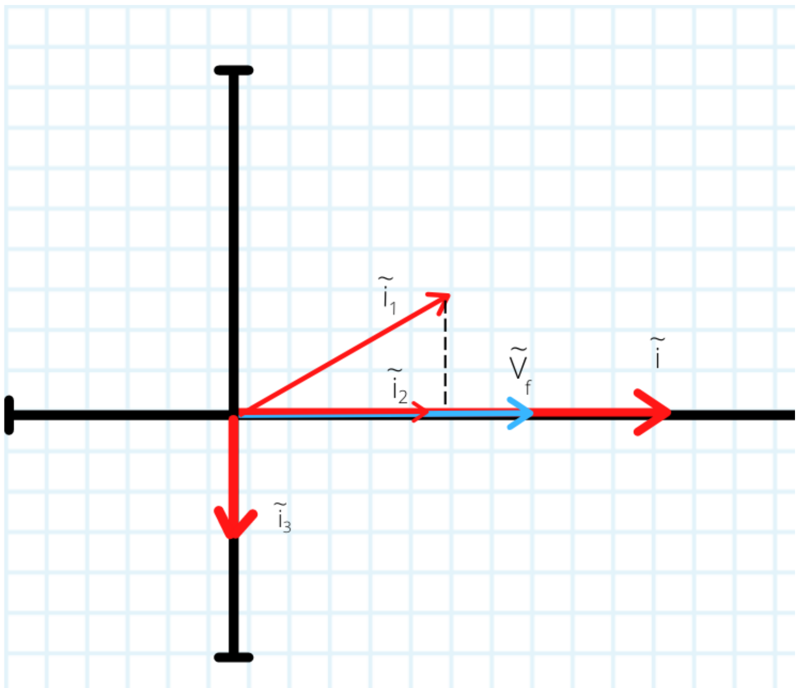


c) Considerando que en la notación fasorial lo que representa a la magnitud física es la parte real del fasor tenemos que las corrientes son:

$$I_1(t) = Re\{\tilde{I}_1 e^{j\omega t}\} = \frac{V_0 \omega C}{\sqrt{(R_1\omega C)^2 + 1}} \cos\left(\omega t + Arctan(\frac{1}{\omega C R_1})\right)$$

$$I_2(t) = Re\{\tilde{I}_2 e^{j\omega t}\} = \frac{V_0}{R}\cos(\omega t)$$

d) La diferencia de potencial entre los nodos que limitan cada rama es igual a la de la fuente $\tilde{V}_f$, es decir $\tilde{V}_f = \tilde{V}_L$. El generador mantiene su voltaje por lo que al conectar el inductor aumenta la corriente suministrada de forma tal que $\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3$ Además, como sabemos que el factor de potencia una vez agregado el inductor es igual a 1, tenemos que $\tilde{I} \parallel \tilde{V}_f$.



e) $\tilde{V}_3 = j\omega L \tilde{I}_3$. La condición para que el factor de potencia sea igual a 1 es:

$$Im\{\tilde{I}_1\} = -Im\{\tilde{I}_3\},$$

ó

$$|\tilde{I}_3| = |\tilde{I}_1|\text{sen}(\phi_1)$$

por ende

$$|\tilde{V}_3| = |\tilde{V}| = V_0 = \omega L|\tilde{I}_3| = \omega L|\tilde{I}_1|\text{sen}(\phi_1) = \omega L\frac{V_0\omega C}{\sqrt{(R_1\omega C)^2 + 1}}\text{sen}(\phi_1)$$

entonces podemos despejar L:

$$L = \frac{\sqrt{(R_1\omega c)^2 + 1}}{\omega^2 C\text{sen}(\phi_1)}$$

Ejercicio 3

a) Las posiciones angulares de los mínimos de interferencia se encuentran en:

$$dsen(\theta_m) = (m + 1/2)\lambda$$

Como nos encontramos en el régimen de ángulos pequeños, $sen(\theta_m) \sim tan(\theta_m) = y_m/L$

Reemplazando se obtiene que las posiciones de los mínimos de interferencia se encuentran en:

$$y_m = (m + 1/2)L\lambda/d$$

El ancho del máximo de difracción coincide con la distancia entre mínimos consecutivos, por lo que tenemos que:

$$y_{m+1} - y_m = \frac{L\lambda}{d}$$

b) Viendo el dibujo se observa que el primer máximo lateral obtenido al iluminar con λ_1 coincide con el primer mínimo obtenido al iluminar con λ_2. Por lo que tenemos que

$$\frac{L\lambda_1}{d} = \frac{L\lambda_2}{2d} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2\lambda_2$$

por ende $\lambda_2 = 700nm$.