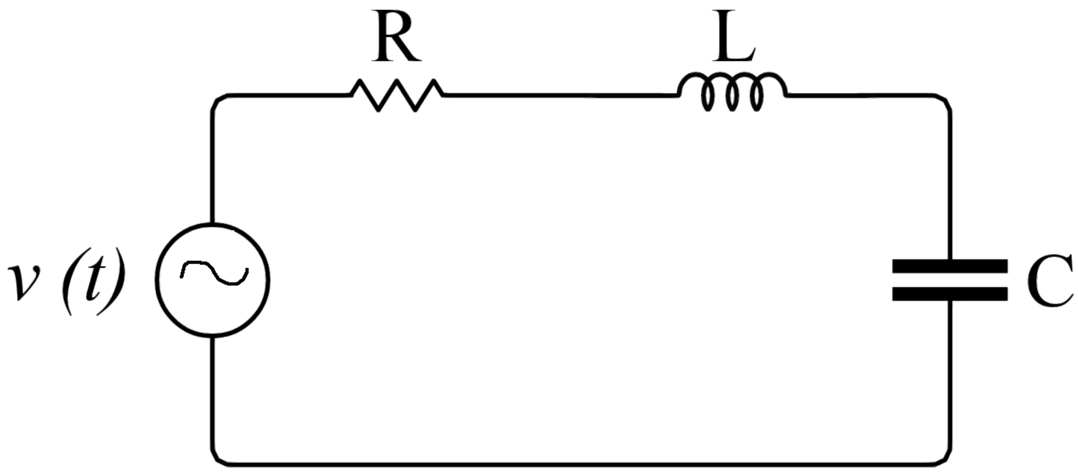
Solución Problema 2 - Examen de Física 3

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

25 de enero de 2021

Ejercicio 1



a) Sabemos que para cada componente

$$\hat{V}_r = \hat{I}R$$

$$\hat{V}_l = \hat{I}Z_l$$

$$\hat{V}_c = \hat{I}Z_c$$

donde el sombrero representa los fasores.
Sabemos que:

$$Z_l = jwL$$
$$Z_c = \frac{-j}{wC}$$

Aplicándolo al circuito dado

$$V_0 - \hat{I}R - \hat{I}Z_l - \hat{I}Z_c = 0,$$

obteniendo una corriente:

$$\hat{I} = \frac{V_0}{R + jwL - \frac{j}{wC}}$$

siendo:

$$|\hat{I}| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}}$$

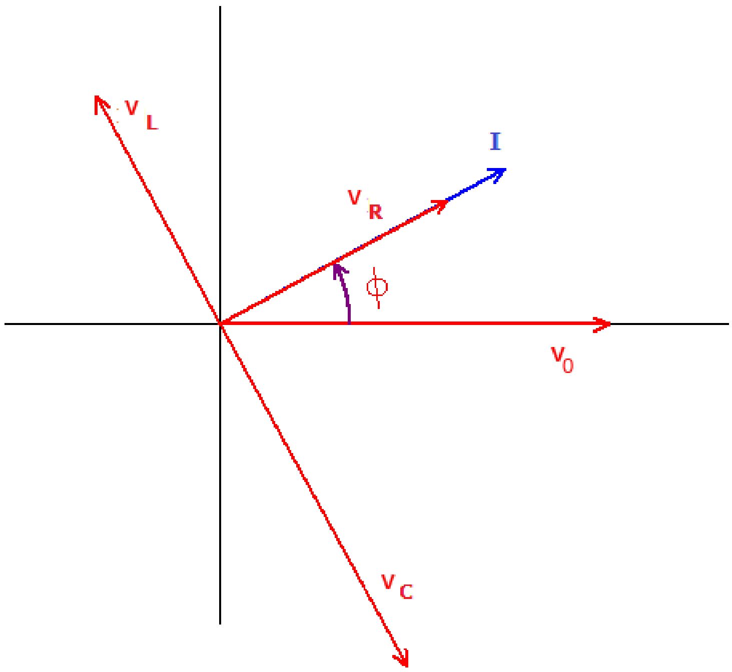
por ende

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} cos(wt + \phi)$$

el desfasaje ϕ viene dado por:

$$tan(\phi) = \frac{\frac{1}{wC} - wL}{R}$$

b)



c)

$$P_{media} = \frac{1}{2} I^2 R = \frac{V_0^2 R}{2(R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2)}$$

d)
Tanto la potencia media como la amplitud de corriente serán máximas cuando el denominador del módulo de la impedancia $|Z|$ sea mínimo, es decir cuando:

$$wL = \frac{1}{wC}$$

es decir

$$w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ejercicio 2

a)

Por simetría las componentes las componentes en la dirección $\hat{e}_r$ se cancelan. Por lo tanto tenemos que integrar solamente las componentes del campo en la dirección $\hat{z}$. Esto es

$$d\vec{E} \cdot \vec{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{d^2} \vec{u} \cdot \vec{z}$$

Integrando se obtiene:

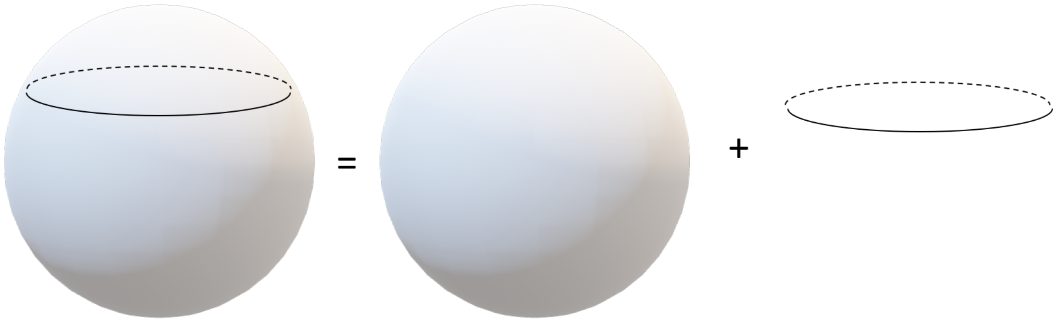
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(H-a)}{[r^2 + (H-a)^2]^{3/2}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda r(H-a)}{[r^2 + (H-a)^2]^{3/2}}$$

Para chequear el resultado vemos que:

- En el centro del anillo, donde $H = a$, se cumple que $\vec{E} = 0$.
- Si $a = 0$ recuperamos el resutlado para el anillo sobre el plano discutido en el teórico.
- En el caso que el punto P se encuentre muy lejos de anillo $\lim_{H\to\infty} \vec{E} = 0$, lo que es consistente con una distribución de carga localizada.

b)

Aplicando el principio de superposición vemos que el campo eléctrico de total producido por la distribución puede calcularse como la suma del campo producido por la esfera más el campo producido por el anillo. Este último resultado ya lo tenemos calculado en la parte a).



Para calcular el campo de la esfera utilizamos la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0}$$

Siendo en este caso

$$Q_{total} = \int_{esfera} \rho \, dV$$

Por la simetría del problema sabemos también que el campo eléctrico puede escribirse como $\vec{E} = E\hat{u}$ y que $\hat{n} = \hat{u}$, siendo $\hat{u}$ un vector saliente normal a la superficie de la esfera.

Con estas consideraciones el campo de la esfera puede escribirse como:

$$\vec{E} = \frac{Q_{total}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{H^2}\hat{u} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 H^2}\hat{u}$$

Con este último resultado y el obtenido en la parte a obtenemos que el campo total de la distribución es:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{anillo} + \vec{E}_{esfera} = \left[\frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\lambda r(H-a)}{[r^2+(H-a)^2]^{3/2}} + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 H^2}\right]\hat{u}$$

Vemos además que $r = \sqrt{R^2 - a^2}$, por lo que:

$$\vec{E}_{total} = \left[\frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\lambda\sqrt{R^2-a^2}(H-a)}{[R^2-a^2+(H-a)^2]^{3/2}} + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 H^2}\right]\hat{u}$$

c)

El electrón permanece en reposo en el punto P, por lo que se debe cumplir $\vec{F} = 0$ lo que implica que $\vec{E} = 0$. Por lo tanto despejando del resultado de la parte anterior obtenemos que:

$$\lambda = -\frac{2R^3\rho}{3H^2}\frac{(R^2-a^2+(H-a)^2)^{3/2}}{\sqrt{R^2-a^2}(H-a)}$$

1. Ejercicio 3

a) En el sistema de la figura sólo hay campo dentro del solenoide y es paralelo al eje del mismo (entrante a la hoja).

Considero una curva cerrada rectangular con dos lados paralelos a la bobina y en un plano bisector a la misma con uno de sus segmentos fuera de la bobina. La ley de Ampère nos dice

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu} . d\vec{l} = i$$

donde i representa la corriente que atraviesa la superficie encerrada por la C.

Si considero $\hat{z}$ saliente a la hoja:

$$\text{Para } 0 < r \leq R \implies \vec{B}(r) = -\mu n I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \hat{z}$$

$$\text{Para } R < r \leq 2R \implies \vec{B}(r) = -\mu_0 n I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \hat{z}$$

$$\text{Para } 2R < r \implies \vec{B}(r) = 0$$

b) La ley de Faraday nos permite calcular el campo eléctrico:

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}.$$

En este caso consideramos C la circunferencia de radio r centrada en el eje del solenoide.

El flujo del campo magnético a través de un área se puede calcular como $\phi = \int_A \vec{B}.\hat{n} da$ siendo $\hat{n}$ la normal saliente. El flujo a través de una superficie transversal al solenoide de radio r es:

$$\text{Para } 0 < r \leq R \implies \phi(r) = -\mu n I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \pi r^2$$

$$\text{Para } R < r \leq 2R \implies \phi(r) = -n I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(\mu \pi R^2 + \mu_0 \pi (r^2 - R^2)\right)$$

$$\text{Para } 2R < r \implies \phi(r) = -n I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(\mu \pi R^2 + \mu_0 \pi 3R^2\right)$$

Aplicando la Ley de Faraday obtenemos:

$$\text{Para } 0 < r \leq R \implies \vec{E}(r) = -\mu \frac{n I_0 r}{2T} \hat{e_\theta}$$

$$\text{Para } R < r \leq 2R \implies \vec{E}(r) = -\frac{n I_0}{2rT} \left(\mu R^2 + \mu_0 (r^2 - R^2)\right) \hat{e_\theta}$$

$$\text{Para } 2R < r \implies \vec{E}(r) = -\frac{n I_0}{2rT} \left(\mu R^2 + \mu_0 3R^2\right) \hat{e_\theta}$$

siendo $\hat{e_\theta}$ el versor que indica el sentido antihorario.