Solución ejercicio 1

a)

Fuera del cilindro.

Tomando como superficie gaussiana un cilindro concéntrico de radio r, y largo L tenemos por ley de Gauss:

$$E 2\pi r L=\frac{\rho\pi\left(R^2-R^2/4\right)L}{\varepsilon_0}=\frac{3}{4}\frac{\rho R^2\pi L}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r)=\frac{3\rho R^2}{8\varepsilon_0 r} \rightarrow \vec{E}(r)=\frac{3\rho R^2}{8\varepsilon_0 r}\hat{e}_r$$

Siendo $\hat{e}_r$ el versor radial.

Dentro del cilidndro.

$$E 2\pi L r=\frac{\rho\left(\pi r^2-\pi R^2/4\right)L}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}(r)=\left(\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}-\frac{1}{8}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0 r}\right)\hat{e}_r$$

Dentro del hueco

$$\vec{E}=0$$

b)

El potencial en un punto r dentro del cilindro se obtiene integrando el campo eléctrico dentro del mismo entre R y r:

$$V(r)-\underbrace{V(R)}_{0}=-\left[\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right)-\frac{1}{8}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

Dentro del hueco, el resultado se obtiene igualando r a R/2 en la expresión anterior, pues el campo eléctrico entre el r=0 y r=R/2 es nulo.

$$V(r)=-\left[\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{8}-\frac{R^2}{2}\right)+\frac{1}{8}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\ln(2)\right]=\left[\frac{3\rho R^2}{16\varepsilon_0}-\frac{1}{8}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\ln(2)\right]=\frac{1}{16}(3-2\ln(2))\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}$$

c)

La variación de energía potencial debe ser igual a la energía cinética inicial.

$$\Delta U=q\Delta V=-(\Delta K)=-\left(\underbrace{K_f}_{0}-K_0\right)=K_0=\frac{1}{2}m v_0^2$$

Entonces:

$$V(r)=\frac{1}{16}(3-2\ln(2))\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}=\frac{1}{2}m v_0^2$$

$$\rightarrow v_0=\sqrt{\frac{1}{8m}(3-2\ln(2))\frac{\rho}{\varepsilon_0}}R$$

Ejercicio 2

Parte a)

Para hallar el campo magnético aplicamos la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$$

Para la región en el interior del cilindro, consideramos un anillo amperiano circular C_1 centrado en el eje del cilindro y de radio $r / 0 < r < R$:

$$\oint_{C_1} B ds = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 \frac{i_1}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$\Longrightarrow B 2\pi r = \mu_0 i_1 \frac{r^2}{R^2}$$

$$\Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i_1 r}{2\pi R^2} \quad (0 < r < R)$$

Para la región en el exterior del cilindro, consideramos un anillo amperiano circular C_2 centrado en el eje del cilindro y de radio $r / r > R$:

$$\oint_{C_2} B ds = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 i_1$$

$$\Longrightarrow B 2\pi r = \mu_0 i_1$$

$$\Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \quad (r > R)$$

Parte b)

Para que la espira se mantenga suspendida en su lugar, la fuerza magnética neta $\vec{F_B}^{tot}$ debe ser igual y opuesta al peso. Para hallar $\vec{F_B}^{tot}$, consideramos cada uno de los lados de la espira por separado. La fuerza magnética de un conductor recto está dada por:

$$\vec{F_B} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Entonces, la fuerza ejercida sobre los lados de la espira que están más cerca del conductor tendrá mayor módulo. Para que $\vec{F_B}^{tot}$ sea hacia arriba, la corriente i_2 deberá ser en sentido horario (de forma que en cada lado de la espira, la fuerza neta sea en la dirección saliente a la espira).
Ahora, tenemos que el $\vec{B}$ a lo largo de los lados verticales no es constante. Pero la fuerza ejercida sobre un elemento de longitud del alambre se cancelará con la fuerza en un elemento de longitud en el lado opuesto, de forma que la $\vec{F_B}$ sobre los lados verticales no aporta a la fuerza neta.
Consideramos los lados horizontales. Le llamamos 1 al lado de arriba y 2 al lado de abajo. Tomando la dirección $\hat{j}$ hacia arriba, tenemos:

$$\vec{F_{B1}} = i_2 \vec{b} \times \vec{B}(a) = i_2 b B(a) \hat{j} \implies \vec{F_{B1}} = i_2 b \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a} \hat{j}$$

$$\vec{F_{B2}} = -i_2 \vec{b} \times \vec{B}(a+b) = -i_2 b B(a+b) \hat{j} \implies \vec{F_{B2}} = -i_2 b \frac{\mu_0 i_1}{2\pi (a+b)} \hat{j}$$

Entonces:

$$\vec{F_B}^{tot} = \frac{i_2 b \mu_0 i_1}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right) \hat{j}$$

$$\Longrightarrow \vec{F_B}^{tot} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \frac{b^2}{a\left(a+b\right)} \hat{\jmath}$$

Para hallar la corriente i_2, aplicamos la condición de equilibrio:

$$\vec{F_B}^{tot} + \vec{P} = 0 \Longrightarrow \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \frac{b^2}{a\left(a+b\right)} = mg$$

$$\Longrightarrow i_2 = \frac{2\pi mg}{\mu_0 i_1} \frac{a\left(a+b\right)}{b^2} = 5,5A$$

Parte c)

Si consideramos un pequeño desplazamiento en la dirección vertical hacia abajo, observamos que la fuerza magnética ejercida sobre la espira $\vec{F_B}^{tot}$ será menor, mientras que el peso se mantendrá igual. La fuerza neta tenderá a alejar al cuerpo de su posición de equilibrio, de donde concluimos que dicho equilibrio es inestable.

Parte d)

La circulación de $\vec{B}$ está dada por:

$$circ\left(\vec{B}\right) = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$$

i) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_1$
ii) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i_1 + i_2\right)$
iii) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_1$

Solución Ejercicio 3.

a) $I_{10}=V_1/R$, $I_{20}=-V_2/R$, $I_{30}=-(I_{10}+I_{20})=(V_2-V_1)/R$

b) $I_{1F}=-I_{2F}=(V_1+V_2)/2R$, $I_{3F}=0$

c) $Q_1=C(V_1-V_2)/2$

d) $Q_2=CV_1$

e) $E_V=V_1(Q_2-Q_1)=CV_1(V_1+V_2)/2$

f) Variación de la energía del capacitor: $\Delta U_C=(Q_2^2-Q_1^2)/2C$. Energía disipada en calor:

$E_D=E_V-\Delta U_C=(Q_2-Q_1)^2/2C=C(V_2+V_1)^2/8$