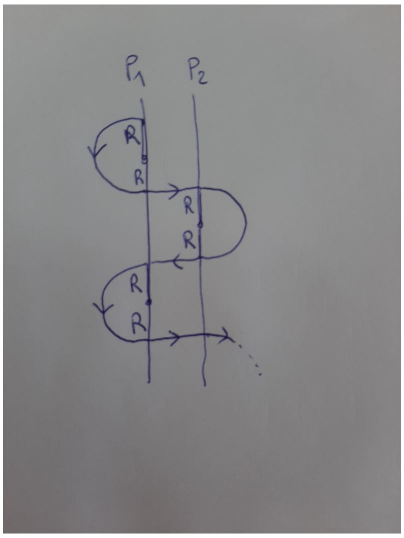
Física 3 - Segundo parcial

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

1 de diciembre de 2022

Problema 1



a) La trayectoria está compuesta por semicírculos intercalados por segmentos de recta (cuando la trayaectoria pasa entre P_1 y P_2) tal como muestra la figura. Para hallar los radios de los semicírculos es conveniente observar que en la parte (a) del ejercicio el movimiento se realiza a *velocidad constante*. Esto se debe a que entre P_1 y P_2 no hay fuerzas aplicadas y en las zonas 1 y 2, la única fuerza aplicada es la fuerza magnética que no trabaja (dado que $\vec{F}_B \perp \vec{v}$). Por ende los semicírculos corresponden a tramos de movimiento circular uniforme. Para dicho movimiento, la aplicación de la 2da ley de Newton da

$$m\frac{v^2}{R} = qvB \tag{1}$$

dónde se ha empleado la expresión de la aceleración centrípeta del movimiento circular y calculado el módulo de la furza magnética (empleando que $\vec{v} \perp \vec{B}$). En consecuencia el radio es

$$R = \frac{mv}{qB} \tag{2}$$

La orientación de las curvas puede hallarse mediante la regla de la mano derecha.

b) Conocido el radio de la trayectoria para una velocidad cualquiera, puede hallarse la velocidad angular

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \tag{3}$$

que no depende de v. El tiempo que lleva recorrer un semicírculo es

$$t_{1\,semicrculo} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi m}{qB} \tag{4}$$

que tampoco depende de v. Luego de recorrer el primer semicírculo, la partícula se frena yendo de P_1 a P_2. Si no se llega a frenar en el primer tramo de desaceleración, recorre un segundo semicírculo. Para que luego (yendo de P_2 a P_1) vuelva a frenarse el potencial debe ser máximo pero con signo opuesto. Para ello debe haber transcurrido durante el segundo semicírculo un segundo *medio período de oscilación* en la diferencia de potencial. Es decir

$$\frac{T}{2} = t_{1\,semicrculo} = \frac{\pi m}{qB} \tag{5}$$

o, equivalentemente,

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \tag{6}$$

c) En el primer viaje entre P_1 y P_2 se pierde la energía cinética qV. Si el período cumple la condición planteada en (c) en el segundo viaje (de P_2 a P_1) vuelve a perder la misma energía cinética. Es decir, que si queremos que se detenga al volver a llegar a P_1 toda la energía cinética debe pasar de su valor inicial a cero en esos dos pasajes:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2qV \tag{7}$$

o, equivalentemente,

$$V = \frac{mv_0^2}{4q} \tag{8}$$

Problema 2

a) Para hallar la corriente se debe resolver un circuito que consta de un capacitor y una resistencia. En concreto, se debe resolver la descarga de un capacitor.

Como la carga del capacitor disminuye con el tiempo, se tiene por convención que $I = -\frac{dq}{dt}$.

Aplicando Kirchhoff se obtiene $IR_0 - \frac{q}{C} = 0$ que se puede resolver separando variables.

$-\frac{dq}{dt}R_0 = \frac{q}{C}$

$\int_Q^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{1}{R_0 C}dt'$

Integrando llegamos a que $q(t) = Qe^{-\dfrac{t}{R_0C}}$. Finalmente como se mencionó anteriormente $I = -\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{Qe^{-\dfrac{t}{R_0C}}}{R_0C} = \dfrac{Ve^{-\dfrac{t}{R_0C}}}{R_0} = I_0e^{-\dfrac{t}{\tau}}$

Donde en la última ecuación se utilizó que $Q = VC$, $\tau = R_0C = 2000\mu s$, $I_0 = V/R_0 = 1,0A$.

b) Según la ley de Ampere $\int \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I$

De aquí obtendremos el campo magnético B, producido por la corriente que circula en el circuito grande, como función de la distancia. Se tiene entonces que $B2\pi r = \mu_0 I$.

$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

El flujo de campo magnético a través de una espira será $\Phi_B = \int \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dA} = \int_d^{d+a} Bbdr = \int \dfrac{\mu_0 Ib}{2\pi r}dr = \dfrac{\mu_0 Ib}{2\pi}ln(\dfrac{a+d}{d})$

$\Phi_B = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi}ln(\dfrac{a+d}{d})I_0e^{-\dfrac{t}{\tau}} = 4{,}39 \times 10^{-8}e^{-\frac{t}{\tau}}Tm^2$

El flujo total en el circuito pequeño es $N\Phi_B$ donde $N = 25$ es el número de espiras.

c) La fem inducida es $\varepsilon_{ind} = -N\dfrac{d\Phi_B}{dt} = N\frac{1}{\tau}\dfrac{\mu_0 b}{2\pi}ln(\dfrac{a+d}{d})I_0e^{-\dfrac{t}{\tau}}$.

Evaluando en $t = 200\mu s$ se obtiene que

$\varepsilon_{ind} = 500\mu V$

El circuito pequeño tiene resistencia $R = 25(2a + 2b)(1{,}0\Omega/m) = 15\Omega$

Finalmente usando que $i_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{500{,}0\mu V}{15\Omega} = 33\mu A$

d) El campo magnético producido por el circuito grande tiene dirección saliente a la hoja en la zona de la espira pequeña. La corriente inducida se opondrá al cambio de flujo magnético el cual es decreciente. Así la corriente inducida tiene sentido antihorario.

e) Por definición la energía disipada es

$U = \int_{100\mu s}^{200\mu s} P(t)dt = \int_{100\mu s}^{200\mu s} Ri_{ind}^2 dt$

Usamos que $Ri_{ind}^2 = R\left(\dfrac{\varepsilon_{ind}}{R}\right)^2 = \dfrac{\varepsilon_{ind}^2}{R} = 2{,}02 \times 10^{-8}We^{-2\frac{t}{\tau}}$

$U = 2{,}02 \times 10^{-8}W \int_{100\mu s}^{200\mu s} e^{-2t/\tau}dt$

$U = 1{,}7 \times 10^{-12}J$

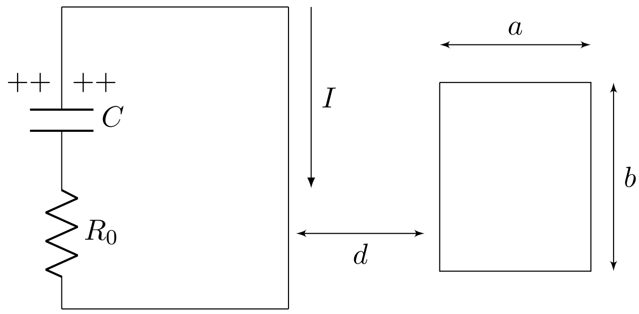


Figura 1

Problema 3

a) Primero usamos que $E_m^2 = (V_m^R)^2 + (V_m^L - V_m^C)^2$ para poder encontrar $V_m^R = i_m R$. Despejando se encuentra que $V_m^R = \sqrt{E_m^2 - (V_m^L - V_m^C)^2} = \sqrt{50^2 - (30-22)^2}V = 49V$. Además usamos que $i_m = \sqrt{2} i_{rms} = 0,33A$ por lo que la resistencia tiene un valor de $R = V_m^R / i_m = 151\Omega$. Finalmente la potencia disipada por la resistencia es $\frac{1}{2} i_m^2 R = \frac{1}{2} i_m V_m^R = 8,0W$.

b) Recordemos la expresión de la impedancia para un circuito RLC en serie $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ la cual es independiente de E_m (sólo depende de la frencuencia ω, la resistencia R, la inductancia L y la capacitancia C). Entonces Z será la misma que en la parte a) $Z = 153\Omega$. Usando que $i_m = E_m/Z$ tenemos que $\bar{P}_R = \frac{1}{2} R E_m^2 / Z^2$, si se requiere que $\bar{P}_R = 16W$ podemos resolver para E_m y encontramos que $E_m = Z\sqrt{2\bar{P}_R/R} = 71V$.

c) La corriente máxima se alcanza cuando ω es tal que $V_m^L = V_m^C$. En este caso $Z = R$ entonces $i_m = E_m/R$. Se obtiene, entonces, que la potencia máxima es $\bar{P}_R = \frac{1}{2} E_m^2 / R$, con $E_m = 50V$ y $R = 151\Omega$. Sustituyendo vemos que $\bar{P}_R = \frac{1}{2} 50^2/(151)W = 8{,}24W$ la cual es menor que $16W$ por lo que no es posible alcanzar el valor deseado.

d) Si cambiamos el valor de R en la expresión de la potencia máxima, para un valor de $E_m = 50V$ fijo, tenemos que $\frac{1}{2}(50^2/R)$. Esto debe ser mayor o igual a $16W$, entonces $R \leq \frac{1}{2} 50^2 / 16\Omega$ de donde se obtiene que si $R \leq 78\Omega$ es posible alcanzar una potencia media disipada de $16W$.