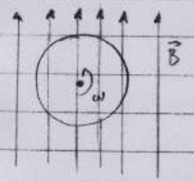
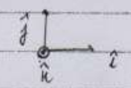
Primer parcial Fisica 3, Setiembre 2018

Ejercicio 1





a) $\vec{F} = \int_{anillo} d\vec{F}$ $\qquad d\vec{F} = \lambda \vec{v} \times \vec{B} \; R\, d\theta$

$\vec{v} = \omega R \; \hat{e_\theta}$ velocidad tangencial

$\vec{B} = B \hat{j}$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} \lambda \omega R^2 B \; (\hat{e_\theta} \times \hat{j})\, d\theta$$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} \lambda \omega R^2 B \; (\cos\theta \; \hat{j} - \operatorname{sen}\theta \; \hat{i}) \times \hat{j} \; d\theta$$

$\hat{j} \times \hat{j} = 0$

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \Rightarrow d\vec{F} = |dF| \; \hat{k}$

$$\vec{F} = -\lambda \omega R^2 B \left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \right) \hat{k} = 0$$

La integral de sen θ en un periodo es 0

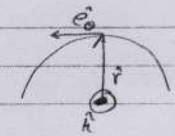
Otra forma de resolverlo es pensar que para cada punto con velocidad $\vec{v}$, el punto diametralmente opuesto tiene velocidad $-\vec{v}$.

b) $\vec{\tau} = \int_{anillo} \bar{r} \times d\vec{F}(\bar{r})$

Para todos los puntos de anillo $\bar{r} = R\,\hat{r}$, y uso el $d\vec{F}$ de la parte anterior.

$$\vec{\tau} = -\int_0^{2\pi} \lambda \omega R^3 B \; \operatorname{sen}\theta \; (\hat{r} \times \hat{k})\, d\theta$$

$\hat{r} \times \hat{k} = -\hat{e_\theta}$



$$\vec{\tau} = \int_0^{2\pi} \lambda \omega R^3 B \; \operatorname{sen}\theta \; \hat{e_\theta} \; d\theta$$

Tengo que descomponer $\hat{e_\theta}$ en versores fijos

$\hat{e_\theta} = \cos\theta \; \hat{j} - \operatorname{sen}\theta \; \hat{i}$

$$\vec{\tau} = \lambda \omega R^3 B \left[\int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2\theta \, d\theta \; \hat{i} + \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta \; \hat{j} \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \pi \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta = 0$$

$$\vec{\tau} = -\lambda \pi \omega R^3 B \; \hat{i}$$

Otra forma de resolverlo es usando el calculo para el torque en una espira:

$\vec{\tau} = I A \hat{n} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{\tau} = \lambda \omega R^3 \pi B \; (\hat{k} \times \hat{j})$

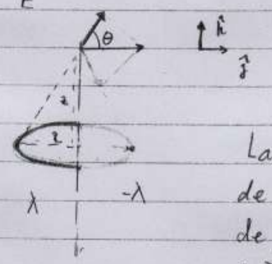
$\vec{\tau} = -\lambda \omega R^3 \pi B \; \hat{i}$

$\hat{n}$ normal a la espira $(n = \hat{k})$

$I = \lambda |v| = \lambda \omega R$

$A = R^2 \pi$ (área del circulo)

c) Comienzo con consideraciones de simetría para determinar la dirección de $\vec{E}$

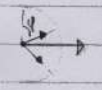


Las componentes verticales de los puntos a uno y otro lado de la separación se cancelan entre ellas.

$\vec{E}$ no tiene componente en $\hat{k}$

Para cada uno de los semicírculos:

las componentes en $\hat{i}$ se cancelan



⇒ El campo total es $\vec{E} = E.\hat{j}$ y cada semicírculo aporta lo mismo:

$$\vec{E} = 2\int_{\substack{\text{medio}\\\text{anillo}}} d\vec{E}_x = \int_0^{\pi} (d\vec{E}) \cdot \cos\theta \; \operatorname{sen}\varphi$$

$\cos\theta$ → proyecta en el plano x.y

$\operatorname{sen}\varphi$ → proyecta en $\hat{j}$

$$\vec{E} = \int_0^{\pi} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2+z^2} \cos\theta \; \operatorname{sen}\varphi \; R \, d\varphi$$

$$\cos\theta = \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E} = \left(2\int_0^{\pi} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\right)\hat{j}$$

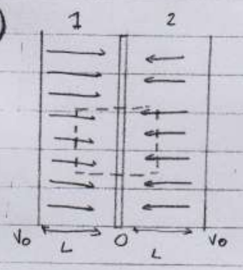
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\right)\hat{j}$$

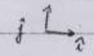
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{j}$$

c) $W = \int_0^{\infty} \vec{F}_E \cdot d\vec{z} = 0$ La fuerza es perpendicular al desplazamiento

Ejercicio 2

a)





En las regiones 1 y 2 el campo eléctrico es:

$\vec{E}_1 = \frac{V_0}{L}\,\hat{i} \qquad \vec{E}_2 = -\frac{V_0}{L}\,\hat{i}$

Tomo la superficie gaussiana marcada por la línea punteada.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{tapa 1}} \vec{E}_1\cdot(-\hat{i}) + \int_{\text{tapa 2}} \vec{E}_2\cdot\hat{i}$$

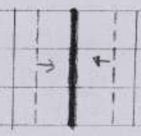
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = -\frac{2V_0}{L}\cdot A \qquad \oint \vec{E}\cdot dA = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0 K}$$

$$Q_{\substack{placa\\central}} = -2\varepsilon_0 K V_0 \frac{A}{L}$$

b) $I = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{A}$

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho} \Rightarrow \vec{J}_1 = \frac{V_0}{L\rho}\,\hat{i} \;,\; \vec{J}_2 = -\frac{V_0}{L\rho}\,\hat{i}$$

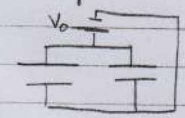
Tomo 2 superficies paralelas a las placas, una en cada región:



$$I = \frac{2AV_0}{L\rho}$$

Ejercicio 2 (otra solución)

a). El sistema es equivalente a dos capacitores iguales en paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 2C$$

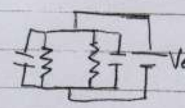
$C = \frac{K\varepsilon_0 A}{L} \Rightarrow$ Capacitor de placas paralelas con dieléctrico.

$$C_{eq} = \frac{2K\varepsilon_0 A}{L} \Rightarrow Q_{eq} = \frac{2K\varepsilon_0 A V_0}{L}$$

La placa del centro tiene la carga negativa:

$$Q_{\substack{placa\\central}} = -\frac{2K\varepsilon_0 A V_0}{L}$$

b) Si estudiamos la resistividad, tenemos dos resistencias conectadas ambas a dos placas con diferencia de potencial V_0 entregada por la misma fuente: Los capacitores están cargados y no circula corriente por ellos.



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{(porque son iguales)}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1}{2}$$

$$R_1 = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow R_{eq} = \frac{\rho L}{2A}$$

$$I = \frac{V_0}{R_{eq}} \qquad I = \frac{2AV_0}{\rho L}$$

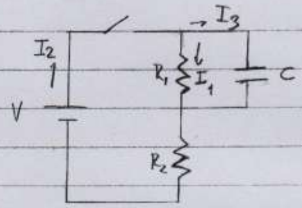
c) Si se desconecta la bateria la energia que disipa el sistema es la acumulada en el condensador en el momento inicial

$$\left.\begin{array}{l} U = \dfrac{q^2}{2C} \\ C = \dfrac{q}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad U = \frac{CV^2}{2}$$

$$U = \frac{\varepsilon_0 K V_0^2 A}{L}$$

Ejercicio 3

d)



ley de nodos:

$$I_2 = I_1 + I_3$$

Ley de mallas:

4) a) $V - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$

b) $\dfrac{q}{C} - I_1 R_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \dfrac{q}{R_1 C}$

$$V - \left(\frac{q}{R_1 C}\right) R_1 - \left(\frac{q}{R_1 C} + I_3\right) R_2 = 0$$

$$V - \frac{q}{C}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{dq}{dt} R_2 = 0$$

$$V - \frac{10}{C} q - \frac{dq}{dt} R_2 = 0$$

$$\frac{1}{\left(V - \frac{10}{C} q\right)} dq = \frac{1}{R_2} dt$$

$$q(t) = \frac{CV}{10}\left(1 - e^{-\frac{10t}{R_2 C}}\right)$$

b) La corriente que entrega la bateria es

$$i(t) = I_1 + I_3$$

$$i(t) = \frac{q}{R_1 C} + \frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = \frac{V}{10 R_1}\left(1 - e^{-\frac{10t}{R_2 C}}\right) + \frac{V}{R_2} e^{-\frac{10t}{R_2 C}}$$

$$i(t) = \frac{V}{10 R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{10 R_1}\right) V e^{-\frac{10t}{R_2 C}}$$

c) La carga inicial es : $q_1 = q(t_1)$

$$q_1 = \frac{CV}{10}\left(1 - e^{-\frac{10}{9}}\right)$$

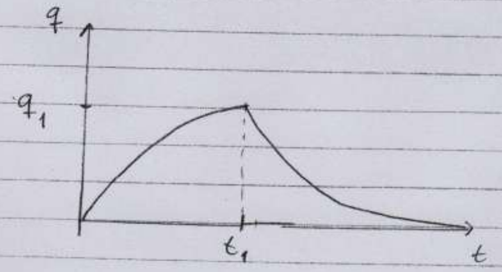
Ley de mallas:

$$0 = \frac{q}{C} + I R_1 \Rightarrow \frac{q}{C} = -R_1 \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{R_1 C}$$

$$\int_{q(t_1)}^{q(t)} \frac{dq}{q} = \int_{t_1}^{t} -\frac{dt'}{R_1 C} \Rightarrow q(t) = q(t_1)\, e^{-(t-t_1)/R_1 C}$$

$$q(t) = \frac{CV}{10}\left(1 - e^{-10/9}\right) e^{-t/R_1 C}$$


q
q1
t1
t