Solución examen Física 3

8 de febrero de 2019

Ejercicio 1

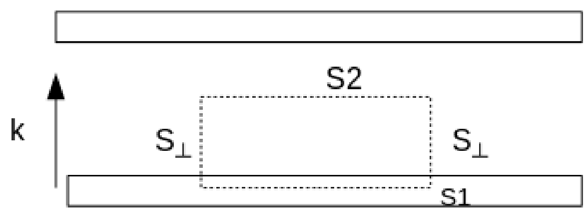
a)

El capacitor de la figura es un capacitor de placas paralelas. Suponemos que el tamaño de las placas es muy grande comparado con la distancia entre ellas, por lo que despreciamos los efectos de borde, y las tratamos como dos placas paralelas infinitas.

Entre dos placas paralelas infinitas el campo debe ser uniforme y en dirección perpendicular a la placa, por la simetría del problema. Dentro de cada placa el campo eléctrico es nulo porque son conductores.

Tomamos una superficie gaussiana con forma de caja, con una cara dentro de una de las placas y otra entre ellas y aplicamos la ley de Gauss.

$$\int_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} \tag{1}$$



Separamos la integral de superficie en las dos caras paralelas $S1$, $S2$ y las caras perpendiculares $S\perp$

$$\int_S \vec{E}.d\vec{S} = \int_{S1} \vec{E}.d\vec{S}_1 + \int_{S2} \vec{E}.d\vec{S}_2 + \int_{S\perp} \vec{E}.d\vec{S}_\perp \tag{2}$$

En las caras perpendiculares el campo es perpendicular a $d\vec{S}_\perp$, por lo que la integral es cero. En la cara S1 el campo es cero, y en la cara S2 el campo es constante. Si asumimos que la placa tienen una densidad de carga superficial σ:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{k} \tag{3}$$

con $\hat{k}$ el versor perpendicular a la placa.

Este resultado no depende del ancho de la caja gaussiana que elegimos, por lo que el campo es constante entre las placas.

Las placas están separadas una distancia d, podemos calcular la diferencia de potencial integrando el campo en un camino ℓ que vaya de una a otra.

$$\begin{array}{c} \Delta V = \int_\ell \vec{E}.\vec{dl} \\ \Delta V = Ed \end{array} \tag{4}$$

La carga total en cada placa es $Q = \sigma.A$, con A el área de la placa. Sustituyendo (3) en (4) y multiplicando por el área obtenemos la relación entre la carga y la diferencia de potencial de las placas $\Delta V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$, entonces:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{5}$$

El área A en nuestro caso corresponde al área en que las placas están superpuestas: $A = \frac{\alpha r^2}{2}$:

$$C = \frac{\alpha r^2 \epsilon_0}{2d} \tag{6}$$

b)

La intensidad es máxima cuando el circuito RLC está en resonancia. Esa condición corresponde a cuando las impedancias capacitiva e inductiva son iguales $\chi_L = \chi_C$

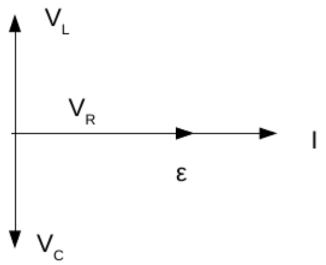
$$\begin{array}{c} \chi_L = \omega L \\ \chi_C = 1/\omega C = \frac{2d}{\omega \alpha r^2 \epsilon_0} \end{array} \tag{7}$$

Despejando α de la condición de resonancia tenemos:

$$\alpha_{res} = \frac{2d}{\omega^2 r^2 L \epsilon_0} \tag{8}$$

c)

En la condición de resonancia los voltajes V_C y V_L están adelantados y atrasados 90º respectivamente de V_R, y ambos tienen el mismo módulo. V_R está en fase con la fuente y con la intensidad.



Ejercicio 2

a)

El área de la espira cambia, lo que genera un cambio en el flujo de campo magnético a través de ella y entonces una fem inducida. Usamos la ley de Faraday para obtenerla.

$$\epsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} \tag{9}$$

$\Phi_B = \frac{Br^2\omega t}{2}$, y al derivar tenemos

$$V_{OP} = \epsilon = \frac{Br^2\omega}{2} \tag{10}$$

b)

A partir del voltaje calculado en la parte anterior obtenemos la intensidad en la resistencia $I = V_{OP}/R$. La potencia que disipa la resistencia por unidad de tiempo es $P = RI^2$.

Tenemos que pasar de diferencial de tiempo a diferencial de arco para poder integrar en la trayectoria:

$$d\theta = \omega dt \tag{11}$$

$$U = \int_{t(A)}^{t(B)} P dt = \int_0^{\pi} \frac{P}{\omega} d\theta \tag{12}$$

Utilizando los resultados de la parte a) para escribir P:

$$U = \int_0^{\pi} \frac{B^2 r^4 \omega}{4R} d\theta = \frac{\pi B^2 r^4 \omega}{4R} \tag{13}$$

c)

Para el circuito con capacitor

$$\frac{Br^2\omega}{2} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \tag{14}$$

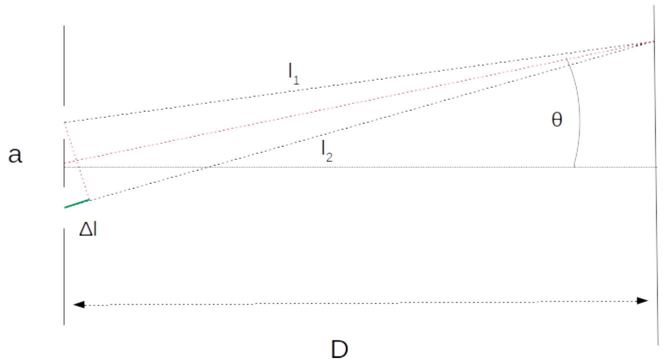
Resolviendo la ecuación diferencial para Q, bajo la condición de que $Q(t = 0) = 0$

$$Q(t) = \frac{CBr^2\omega}{2}(1 - e^{-t/RC}) \tag{15}$$

Ejercicio 3

a)

Las posiciones en la pantalla cumplen que $x = D\tan(\theta)$.



Suponemos que la distancia entre rendijas es mucho menor a la distancia hasta la pantalla $a << D$ (coherente con los valores). Bajo esta suposición la diferencia de caminos entre los haces es $\Delta l \simeq a\sin(\theta)$ y como suponemos que el ángulo es pequeño podemos aproximarlo por $\Delta l \simeq a\tan(\theta)$.

Los máximos de intensidad ocurren cuando la diferencia de camino es un número entero de longitudes de onda, en particular el máximo 50 ocurre cuando $\Delta l = 50\lambda$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la condición para el máximo obtenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{ax_{50}}{D} &= 50\lambda \\ x_{50} &= \tfrac{50\lambda D}{a} = 8cm \end{aligned} \tag{16}$$

b)

Al agregar la mica, debemos sumar a los caminos ópticos de los dos haces el ancho de la mica, y tener en cuenta el cambio de longitud de onda debido al medio.

$$\Delta l_{nuevo} = (l_{2n} + e) - (l_{1n} + ne) \tag{17}$$

El primer máximo ocurre cuando $\Delta l_{nuevo} = 0$, es decir cuando $l_{2n} - l_{1n} = (n-1)e$. Como $(n-1) > 1$, $l_{2n} > l_{1n}$ y el patrón se moverá hacia arriba.

c)

Usando los resultados de la parte a) para calcular $l_{2n} - l_{1n}$, obtenemos

$$\begin{aligned} (n-1)e &= \tfrac{ax_{0n}}{D} \\ x_{0n} &= \tfrac{D(n-1)e}{a} \simeq 4,7cm \end{aligned} \tag{18}$$