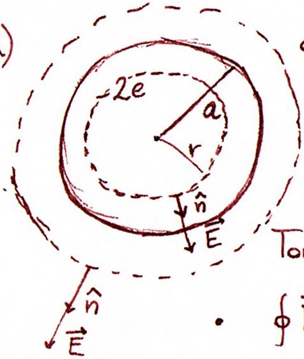
Examen 11/08/20

Ejercicio 1.

a)



densidad de carga uniforme: $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{-2e}{4/3\pi a^3}$

simetría esférica $\longrightarrow$ $\vec{E} = E(r)\hat{e}_r$

Ley de Gauss: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

Tomo esfera gaussiana concéntrica a la nube esférica; con radio r

- $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \oint E(r)\,\hat{e}_r\cdot \underbrace{\hat{n}}_{=\hat{e}_r} da = E(r) \underbrace{\oint da}_{\text{área de la esfera}} = E(r)\, 4\pi r^2$

r cte. en superficie donde integramos, entonces E(r) cte. sale de la integral

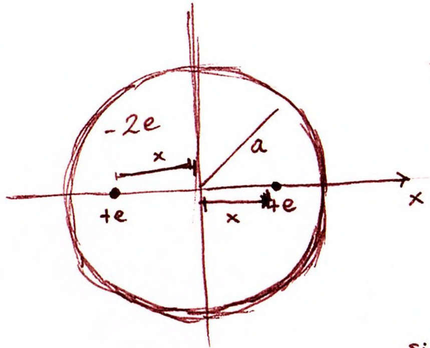
- $Q_{enc} = \rho \times$ volumen de la nube encerrado

$$\Rightarrow Q_{enc} = \begin{cases} \frac{-2e}{\cancel{4/3\pi} a^3}\,\cancel{4/3\pi} r^3 & \text{si } r \leq a \\ \frac{-2e}{4/3\pi a^3}\,4/3\pi a^3 = -2e & \text{si } r > a \end{cases}$$

Entonces:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{-2er}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,\hat{e}_r & \text{si } r \leq a \\ \frac{-2e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{e}_r & \text{si } r > a \end{cases}}$$

b)



posición de equilibrio: $\sum \vec{F}_i = 0$ sobre cada carga

* para la carga de la derecha:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_E = e\vec{E} = 0 \,, \quad \text{donde } \vec{E} = \underbrace{\vec{E}_{nube}}_{\text{campo generado por la nube}} + \underbrace{\vec{E}_{carga}}_{\text{campo generado por la otra carga}}$$

si la carga está en $x<a$, el campo de la nube en esa posición es

$$\vec{E}_{nube} = \frac{-2ex}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,\hat{x}$$

y el campo de la otra carga

$$\vec{E}_{carga} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \underbrace{(2x)^2}_{\text{dist. entre las cargas es } 2x}}\,\hat{x}$$

entonces:

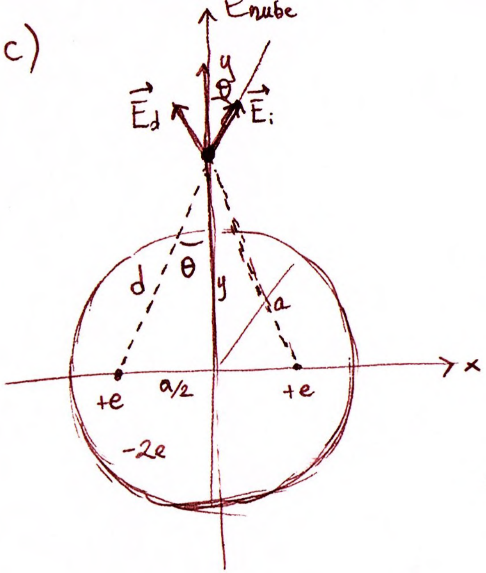
$$e\vec{E} = e\left[-\frac{2ex}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2}\right]\hat{x} = 0 \Rightarrow -\frac{2ex}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2x}{a^3} + \frac{1}{(2x)^2} = 0 \Rightarrow (2x)^3 = a^3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2}}$$

* la carga de la izquierda tiene que estar entonces en $\boxed{x = -\frac{a}{2}}$. Vemos que esto verifica condición de equilibrio:

$$\vec{F}_E = e\vec{E} = e\left[\vec{E}_{nube} + \vec{E}_{carga}\right] = e\left[\frac{2e(a/2)}{4\pi\varepsilon_0 a^3} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right]\hat{x} = e\left[\frac{2(a/2)}{a^3} - \frac{1}{a^2}\right]\hat{x} = 0$$

c)



Tomamos un punto arbitrario en la mediatriz del segmento que une las cargas (eje y), a distancia y del centro de la nube. El campo en ese punto es

$y > a$

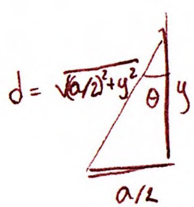
$$\vec{E} = \vec{E}_{nube} + \underbrace{\vec{E}_i}_{\text{campo carga izquierda}} + \underbrace{\vec{E}_d}_{\text{campo carga derecha}}$$

• el campo de la nube es

$$\vec{E}_{nube} = \frac{-2e}{4\pi\varepsilon_0 y^2}\,\hat{y}$$

• los campos de las cargas tienen por simetría la misma componente $\hat{y}$ y componentes $\hat{x}$ opuestas. La suma entonces es

$$\vec{E}_i + \vec{E}_d = 2E_{i_y}\,\hat{y} = 2E_{d_y}\,\hat{y} = 2\overbrace{E_i}^{\text{módulo de } \vec{E}_i}\cos\theta\,\hat{y}$$



$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (a/2)^2}}$$

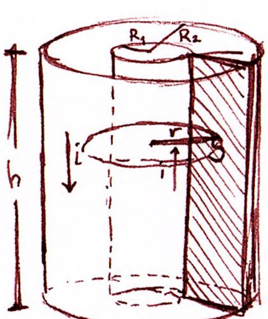
$$E_i = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\left(y^2 + (a/2)^2\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_i + \vec{E}_d = \frac{2ey}{4\pi\varepsilon_0\left[y^2 + (a/2)^2\right]^{3/2}}\,\hat{y}$$

Entonces

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\left[y^2 + (a/2)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{y}}$$

Ejercicio 2.



a) La inductancia L se define como

$$\mathcal{E}_L = L\frac{di}{dt}$$

donde $\mathcal{E}_L$ es la magnitud de la fem inducida, en este caso sobre el borde de la superficie S, y $\frac{di}{dt}$ la magnitud de la derivada de la corriente, de modo que $L > 0$.

Tenemos por ley de Faraday:

$$\mathcal{E}_L = \left| -\frac{d\Phi_B}{dt} \right|$$

(Campo magnético sobre superficie S: $\vec{B} = B(r)\hat{e}_\phi$ por simetría (despreciando efectos de borde)

Ampére en anillo de radio $R_1 < r < R_2$, coaxial con el cilindro y parametrizado en sentido antihorario:

- $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint \overbrace{B(r)}^{\text{cte en anillo}}\, \hat{e}_\phi \cdot \underbrace{\hat{e}_\phi}_{\text{versor} \parallel \text{a la curva}}\, dl = B(r)\underbrace{\oint dl}_{\text{long. de la curva}} = B(r)2\pi r$

- $\mu_0 i_{enc} = \mu_0 \underbrace{i}_{\text{corriente por cilindro interior}}$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{e}_\phi \quad \text{en } R_1 < r < R_2,\ 0 < z < h$$

Entonces el flujo a través de S, tomando la normal según $\hat{e}_\phi$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\hat{e}_\phi\cdot\hat{e}_\phi\,\underbrace{h\,dr}_{da} = \frac{\mu_0 i h}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i h}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

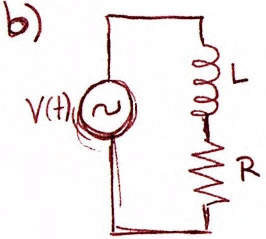
y

$$\varepsilon_L = \left|-\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{di}{dt}$$

por lo que la inductancia es

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

b)



$\underline{\tilde{V} = V_0 e^{j\omega t}}$; $\omega = 2\pi f$

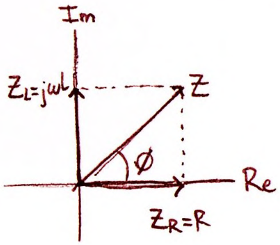
fasor voltaje en la fuente

$\tilde{V} = Z\tilde{I}$, donde Z es la impedancia equivalente

Como R, L están en serie: $Z = Z_R + Z_L = R + j\omega L$

Reescribimos Z como

$$Z = |Z|e^{j\phi}, \quad |Z| = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}, \quad \phi = \arctan\frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \arctan\frac{\omega L}{R}$$



$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|Z|e^{j\phi}} = \frac{V_0}{|Z|}e^{j(\omega t-\phi)} \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{|Z|}\cos(\omega t-\phi)$$

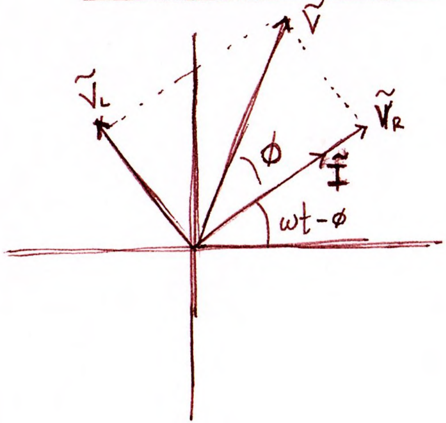
Amplitud: $\boxed{I_0 = \frac{V_0}{|Z|}} = \boxed{\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}}$, podemos sustituir L por lo hallado en parte a):

Desfasaje: $\boxed{\phi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)}$

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+(2\pi f\mu_0 h\ln(R_2/R_1)/2\pi)^2}} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+[f\mu_0 h\ln(R_2/R_1)]^2}} \\[2ex] \phi = \arctan\left(\dfrac{f\mu_0 h\ln(R_2/R_1)}{R}\right)\end{cases}$$

c) $\tilde{V} = V_0 \, e^{j\omega t}$

$$\tilde{I} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \, e^{j(\omega t-\phi)}$$



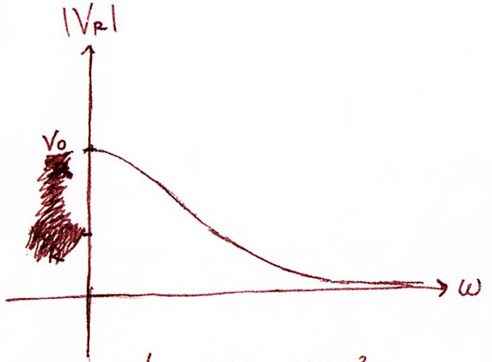
$$\tilde{V}_R = R\tilde{I} = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \, e^{j(\omega t-\phi)}$$

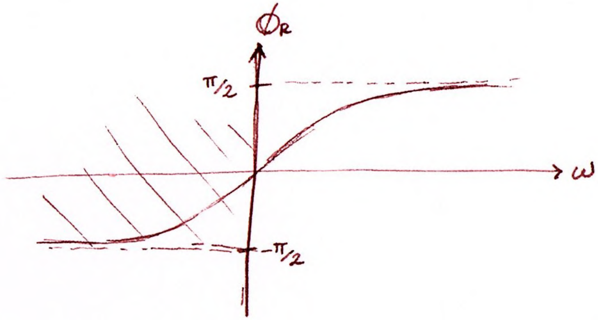
$$\tilde{V}_L = j\omega L \tilde{I} = \frac{V_0 \omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \, e^{j(\omega t-\phi+\pi/2)}$$

$\hookrightarrow j = e^{j\pi/2}$

d) $\tilde{V}_R = \dfrac{V_0 R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\, e^{j(\omega t-\phi)}$ $\longrightarrow$ desfasaje respecto a la fuente es ϕ

Entonces $\boxed{|V_R| = \dfrac{V_0 R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}}$ $\boxed{\phi_R = \arctan\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)}$





$\dfrac{d|V_R|}{d\omega} = \dfrac{V_0 R L^2 \omega}{(R^2+(\omega L)^2)^{3/2}}$ sólo se anula en 0, $\dfrac{d^2|V_R|}{d\omega} = \dfrac{V_0 R L^2}{[R^2+(\omega L)^2]^{3/2}}\left(1 - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{2\omega^2 L^2}{R^2+(\omega L)^2}\right)$, se anula en $\omega = \dfrac{R}{\sqrt{2}L}$

- En $\omega \longrightarrow 0$: $|V_R| \longrightarrow V_0$ (límite corriente continua, el voltaje en el inductor es 0)

  $\phi_R \longrightarrow 0$

- En $\omega \longrightarrow \infty$: $|V_R| \longrightarrow 0$

  $\phi_R \longrightarrow \pi/2$

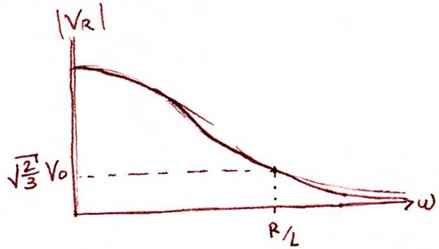
e) Potencia media disipada por la resistencia:

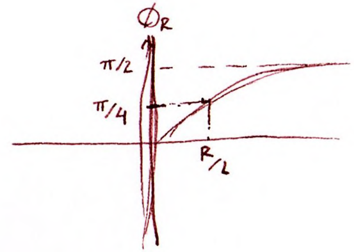
$$\overline{P}_R = R I_{rms}^2 = \frac{1}{2} R I_0^2 = \frac{R V_0^2}{2(R^2+(\omega L)^2)}$$

máxima disipación: $\omega = 0 \longrightarrow \overline{P}_R = \frac{R V_0^2}{2R^2} = \frac{V_0^2}{2R}$

$$\rightarrow \overline{P}_R(\omega) = \frac{V_0^2}{4R} = \frac{R V_0^2}{2(R^2+(\omega L)^2)} \longrightarrow \frac{1}{2R} = \frac{R}{[R^2+(\omega L)^2]} \longrightarrow 2R^2 = [R^2+(\omega L)^2] \longrightarrow \omega L = R \rightarrow \boxed{\omega = \frac{R}{L}}$$

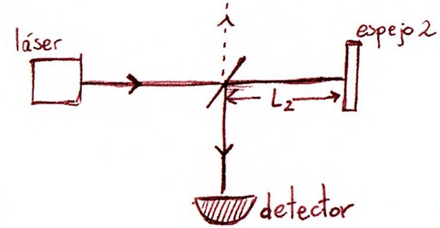
mitad de disipación máx.





Ejercicio 3.

a)



onda plana:

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

potencia por unidad de área de una onda EM se describe con

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{(vector de Poynting)}$$

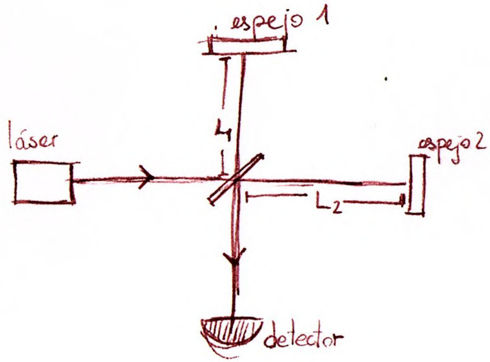
$|\vec{S}|$ es la magnitud de la potencia, dirección indica hacia dónde es el flujo de energía

Para una onda plana: $E = cB$, y $S = \frac{1}{\mu_0} EB \Rightarrow S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2$

Si el detector mide una potencia por unidad de área P_0/A (mide potencia media)

$$\frac{P_0}{A} = \bar{S} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \longrightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{2\mu_0 c P_0/A}}$$

b)



- las ondas que recorren los dos brazos del interferómetro están en fase antes de llegar al divisor
- las dos ondas son reflejadas una vez en un espejo y una vez en el divisor antes de llegar al detector
  $\longrightarrow$ su fase relativa no cambia por la reflexión
- las ondas recorren dos veces la distancia del divisor al espejo $\longrightarrow$ la diferencia de longitud entre sus trayectorias es

$$\Delta r = 2L_2 - 2L_1 = 2(L_1 - L_2) = 2\Delta L$$

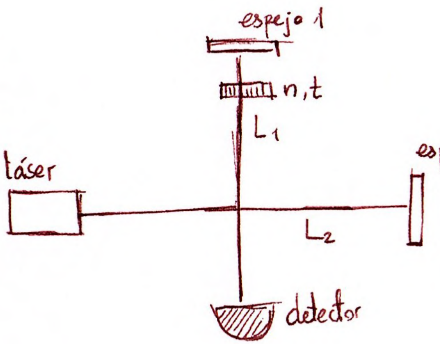
para que haya interferencia constructiva (máx. de la potencia): Δr debe ser un número entero de longitudes de onda, de modo que la fase relativa entre ambas ondas sea 0:

$$\Delta r = \boxed{2\Delta L = n\lambda}$$

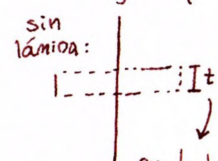
para que haya interferencia destructiva (potencia 0): desfasaje debe ser medio período $\longrightarrow$ Δr es un número semientero de longitudes de onda

$$\Delta r = \boxed{2\Delta L = (n+\tfrac{1}{2})\lambda}$$

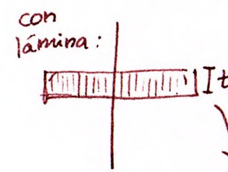
c)



desfasaje que introduce la lámina



en t hay $\frac{t}{\lambda}$ períodos de la onda



en t hay $\frac{t}{\lambda'}$ períodos de la onda, con λ' long. de onda en el material

El número de períodos en que se desfasa la onda por la presencia del material es

$$m = \frac{2t}{\lambda'} - \frac{2t}{\lambda}$$

(factor de 2 porque pasa 2 veces por la lámina)

Para que haya máx. de interferencia, m debe ser entero

Tenemos que:

$$c = \frac{\lambda}{T} \text{ (sin lámina)}, \quad v = \frac{\lambda'}{T} \text{ (con lámina)}$$

$\longrightarrow$ frecuencia no cambia

$$\longrightarrow \quad \frac{c}{\lambda} = \frac{v}{\lambda'} \longrightarrow \frac{c}{v}\lambda' = \lambda \longrightarrow n\lambda' = \lambda$$

$\hookrightarrow$ índice de refracción

Para que haya un máximo de interferencia:

$$m = 2t\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{2t}{\lambda}(n-1) \longrightarrow \quad m\lambda = 2t(n-1)$$

El mínimo t que produce un máximo corresponde a $m = 1$

$$\boxed{t_{mín} = \frac{\lambda}{2(n-1)}}$$