Primer Parcial

Octubre 2020

Ejercicio 1 Para calcular la carga encerrada en una esfera concéntrica con la esfera cargada debemos integrar la densidad de carga no uniforme en el volúmen teniendo en cuenta que tenemos simetría en los ánglos.

$$q_{enc} = \int dV \rho(r) = \int_0^r dr' \rho(r') 4\pi r'^2 = \int_0^r dr' \rho_0 4\pi r'^3 = \rho_0 \pi r^4$$

recordar que el volúmen del cascarón esférico de radio r y ancho dr es $dV = 4\pi r^2 dr$

b) Para calcular el campo en cualquier punto dentro de la esfera utilizamos el teorema de Gauss usando una superficie esférica concéntrica con la esfera como en la parte a:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\rho_0 \pi r^4}{\epsilon_0}$$

Dado que la carga es positiva el campo tiene dirección radial y sentido hacia afuera de la esfera al igual que el normal exterior por ende el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$. Por la simetría del problema el campo depende únicamente del radio y es constante sobre toda la superficie gaussiana elegida por ende puedo sacarlo fuera de la integral e integrar el diferencial de área obteniendo el área de la esfera $4\pi r^2$

$$\oint_S EdA = E \oint dA = E 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \pi r^4}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0}$$

en dirección radial.

c) Si integramos el campo en un camino con dirección radial desde r=0 a r=R obtenemos el módulo de la diferencia de potencial desde R al origen. Como las direcciónes de $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ son iguales el producto escalar es directamente el producto de los modulos.

$$|\Delta V| = \int_0^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^R \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0} dr = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0}$$

d)Dado que la energía se conserva por actuar todas fuerzas conservativas sabemos que toda la energía que tiene una partícula colocada en reposo en la superficie se convertirá en energía cinética al alcanzar la partícula el origen. La energía de una partícula en reposo en R es qV, que debe ser igual a la energía cinética alcanzada en el origen $\frac{1}{2}mv^2$.

$$qV = \frac{1}{2}mv^2$$

de dónde podemos despejar la velocidad :

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

en la direccíon de $-\vec{r}$

Ejercicio 2

a) La ley de las mallas da lugar a la ecuación siguiente para el circuito una vez cerrado el interruptor:

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}.$$

Como se tiene, además, que

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

se obtiene una ecuación diferencial:

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}.$$

Dicha ecuación es lineal, con segundo miembro y coeficientes independientes del tiempo. Por lo tanto, la solución general es suma de una solución particular de la cuación con la solución general de la homogénea. Una solución particular en este caso es constante:

$$q_p(t) = C\mathcal{E}.$$

La solución general de la homogénea se puede obtener, buscando una solución exponencial (o aprovechando que es una ecuación de variables separables). Se obtiene:

$$q_h(t) = Q\exp\Big(-\frac{t}{RC}\Big).$$

Es decir, la solución general de la ecuación es:

$$q(t) = C\mathcal{E} + Q\exp\Big(-\frac{t}{RC}\Big).$$

Si se impone la condición inicial $q(t=0) = q_0$, se obtiene:

$$q(t) = C\mathcal{E}\Big[1 - \exp\Big(-\frac{t}{RC}\Big)\Big] + q_0\exp\Big(-\frac{t}{RC}\Big).$$

b) La potencial disipada en la resistencia es:

$$\mathcal{P} = Ri^2(t).$$

Ahora bien,

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \Big(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q_0}{RC}\Big)\Big[\exp\Big(-\frac{t}{RC}\Big)\Big].$$

Por ello,

$$\mathcal{P} = R\Big(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q_0}{RC}\Big)^2\Big[\exp\Big(-\frac{2t}{RC}\Big)\Big].$$

c) La energía total disipada en la resistencia es

$$W = \int_0^\infty dt\,\mathcal{P}(t) = \int_0^\infty dt\,R\Big(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q_0}{RC}\Big)^2\Big[\exp\Big(-\frac{2t}{RC}\Big)\Big] = \Big(\mathcal{E} - \frac{q_0}{C}\Big)^2\frac{C}{2}$$

d) La energía inicialmente almacenada en el condensador es $E_i = q_0^2/(2C)$. La razón por la que son diferentes es porque la batería aporta energía al circuito.