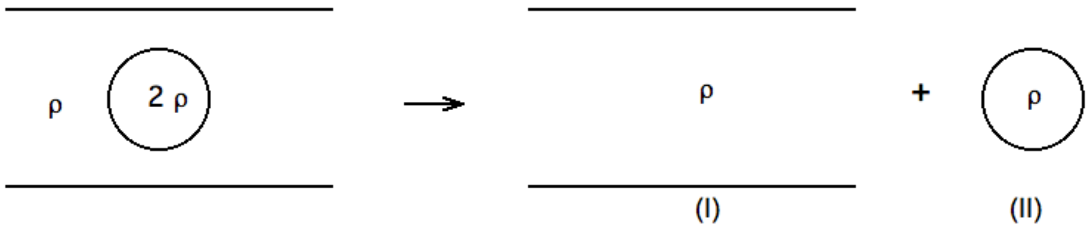
SOLUCIONES PRIMER PARCIAL F3 2016

Problema 1

a) Se separa distribución de cargas de simetría cilíndrica en dos partes:



Aplicamos la ley de Gauss para el campo eléctrico:

Contribución de (I) al campo eléctrico:
Por simetría es vertical y dirigido hacia fuera a partir del plano central. Superficie gaussiana cilíndrica vertical con tapas de área A en z y –z . Entonces

$$\phi = 2E_I(z)A = \frac{2zA\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_I(z) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} z\,\hat{k}$$

Contribución de (II) al campo eléctrico:
Por simetría es radial. Superficie gaussiana esférica centrada, de radio r'.
(para cualquier vector radial tenemos: $\vec{r}\,' = r\hat{e}_r + z\hat{k}$)

Entonces $\phi = 4\pi r'^2\, E_{II}(\vec{r}\,') = \dfrac{4\pi r'^3 \rho}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{II}(\vec{r}\,') = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,' = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r\hat{e}_r + z\hat{k}\right)$

Sumando las contribuciones de ambas distribuciones, el campo total es:

$$\vec{E}(r,z) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r\hat{e}_r + z\hat{k}\right) + \frac{\rho}{\varepsilon_0} z\,\hat{k} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r\hat{e}_r + 4z\,\hat{k}\right)$$

b) Partiendo de $V_B - V_A = -\int_A^B d\vec{E}\cdot d\vec{S}$, elegimos integrar de (0,0) a (r,z) por dos caminos rectilíneos: primero de (0,0) a $(r,0)$ y después de$(r,0)$ a (r,z):

$$V(r,z) = -\int_0^r E_r(r',0)\,dr' - \int_0^z E_z(r,z')\,dz' = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\int_0^r r'\,dr' + 4\int_0^z z'\,dz'\right] = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r^2 + 4z^2\right)$$

c) Movimiento con z=0 : $V(r,0) = -\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 \Rightarrow U(r) = \dfrac{q\rho}{6\varepsilon_0} r^2$

Conservación de la energía mecánica:

$$E = U + K = \frac{q\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{1}{2} m v^2 = cte \Rightarrow \frac{q\rho}{3\varepsilon_0} r + m\dot{v} = 0 \Rightarrow \frac{q\rho}{3\varepsilon_0} r + m\ddot{r} = 0$$

La ecuación del movimiento es entonces $\ddot{r}+\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}r=0$, correspondiente a un oscilador armónico de frecuencia $\omega=\sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}$

d) Movimiento en el eje z (r=0): $V(0,z)=-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}4z^2 \Rightarrow U(z)=\frac{2q\rho}{3\varepsilon_0}z^2$

Al igual que en **c)** se obtiene un oscilador armónico con frecuencia $\omega_z=2\omega_r$.

e) Ecuación horaria en r: $r(t)=r_0\cos(\omega_r t+\phi)$,

con condiciones iniciales $r(0)=A \quad ,\dot{r}(0)=0 \Rightarrow r_0=A$ y $\phi=0$.

Entonces, $r(t)=A\cos(\omega_r t)$.

Ecuación horaria en z: $z(t)=z_0\cos(\omega_z t+\phi)$

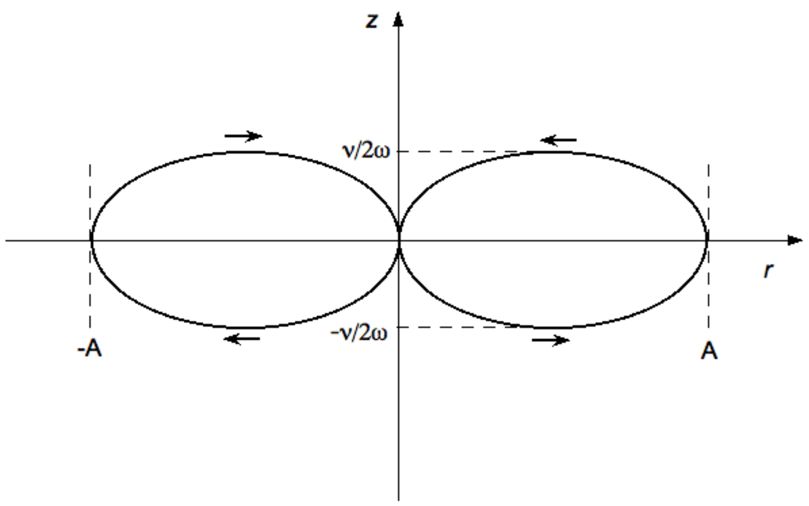
con condiciones iniciales $z(0)=0 \quad ,\dot{z}(0)=v \Rightarrow \quad \phi=\frac{\pi}{2}$ y $\omega_z z_0=v$.

Entonces, $z(t)=\frac{v}{\omega_z}\sin(\omega_z t)$.

Escribiendo $\omega_r=\omega$ y $\omega_z=2\omega$,

nos queda $r(t)=A\cos(\omega t)$ y $z(t)=\frac{v}{2\omega}\sin(2\omega t)$.

Trayectoria



Problema 2

a)

- En la malla izquierda ($\mathcal{E}$, R, R) tenemos: $\varepsilon - RI - RI_R = 0$
- En la malla derecha (C, R) tenemos: $V_C = RI_R = \dfrac{q}{C}$
- En el nodo (R,R) tenemos $I = I_R + I_C = I_R + \dot{q}$

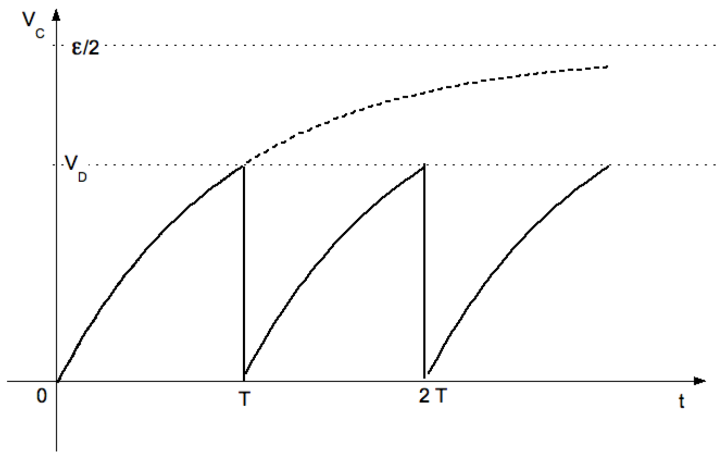
La ecuación diferencial para q es: $q + \dfrac{RC}{2}\dot{q} = \dfrac{\varepsilon C}{2}$.

Su solución, para el condensador descargado en t=0 es: $q(t) = \dfrac{\varepsilon C}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$.

El voltaje en bornes de C es entonces: $V_C(t) = \dfrac{q(t)}{C} = \dfrac{\varepsilon}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$

b)

Partiendo con el condensador descargado (y la llave cerrada) no circula corriente por la lámpara y el voltaje V_C crece como calculado en (a) hasta alcanzar valor V_D. En ese "instante" T la lámpara destella y el condensador se descarga de manera que el ciclo vuelve a empezar.



Cálculo de T: $V_C(T) = \dfrac{\varepsilon}{2}\left(1 - e^{-\frac{2T}{RC}}\right) = V_D \Rightarrow T = \dfrac{RC}{2}\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon - 2V_D}\right)$

c)

Como el tiempo entre destellos T es proporcional a la capacidad C, hay que duplicar la capacidad para duplicar T. La constante dieléctrica debe ser $\kappa = 2$.