Solución del examen del 4 de febrero de 2012

Instituto de Física - Facultad de Ingeniería

Problema 1

(a)

Todas las cargas están a la misma distancia $d = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ del punto pedido. Usando la fórmula del potencial coulombiano, se halla

$$V(a/2, a/2, a/2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}(q + q - q - q) = 0.$$

(b)

Consideremos la energía potencial de cada carga al traerlas desde un punto muy alejado, de a una en una (no importa el orden). Sumando las energías $U_i = q_i \times V_i$, siendo q_i la i-ésima carga traída ($i = 1, 2, 3, 4$) y V_i el potencial en la posición final producido por las demás cargas presentes, tenemos que la energía del sistema es

$$U = \sum_i U_i = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}(-1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1) = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{2}a}$$

usando que todas las cargas están separadas por la misma distancia $l = \sqrt{2}a$.

(c)

En el punto (a, a, a), los campos eléctricos producidos por cada carga son de igual módulo y están orientado según los versores unitarios

$$\frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}}, \frac{\hat{z} + \hat{x}}{\sqrt{2}}, -\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}.$$

Calculando el campo eléctrico total como la suma (vectorial) del campo eléctrico coulombiano y la fuerza mediante $\vec{F} = (-q) \times \vec{E}$, hallamos

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a^2)}\left[\frac{-\hat{z} - \hat{y} - \hat{x} - \hat{z} + \hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}\right] = -\frac{q^2}{\sqrt{2} \cdot 4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{z}$$

Problema 2

(a)

En el primer proceso, con el condensador conectado, la ecuación del circuito se puede escribir como

$$E = Ri + \frac{q}{C}$$

lo cual implica que $q = CE$, ya que la corriente $i \to 0$ para tiempos largos.

Luego, con la bobina conectada, la ecuación del circuito puede escribirse como

$$E - Ri - L\frac{di}{dt} = 0.$$

La solución de esta ecuación, tomando en cuenta la condición inicial $i(0) = 0$, es

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

En el tiempo t_1 se cumple $i(t_1) = E/(2R)$. Esta condición permite determinar t_1:

$$1 - e^{-Rt_1/L} = \frac{1}{2} \to -\frac{Rt_1}{L} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \to t_1 = \frac{L}{R}\ln 2$$

INSTITUTO DE FÍSICA
FACULTAD DE INGENIERÍA

Las energías almacenadas en ese instante en la bobina y en el condensador son

$$U_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LE^2}{8R^2} \qquad \text{y} \qquad U_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{CE^2}{2}.$$

(b)

La energía total del sistema se conserva y es igual al valor inicial total $U_T = U_L + U_C$. Cuando toda la energía está acumulada en el condensador, este tiene la carga máxima q_{max}, y se cumple

$$\frac{q_{max}^2}{2C} = U_T = \frac{LE^2}{8R^2} + \frac{CE^2}{2}$$

Por lo tanto,

$$q_{max} = E\left(\frac{LC}{4R^2} + C^2\right)^{1/2}$$

Cuando toda la energía está acumulada en el inductor, la corriente por el circuito es máxima i_{max}, y se cumple

$$\frac{Li_{max}^2}{2} = U_T = \frac{LE^2}{8R^2} + \frac{CE^2}{2}$$

Por lo tanto,

$$i_{max} = E\left(\frac{1}{4R^2} + \frac{C}{L}\right)^{1/2}$$

Problema 3

(a)

Para eliminar la reflexión se desea conseguir interferencia destructiva entre las ondas reflejados. La diferencia de fase entre la onda reflejada en la primer interfase (aire-película) y la que se transmite a través de la película, se refleja en la segunda interfase (película-vidrio) y luego se transmite desde la película al aire es

$$\Delta\phi = 2\pi n \frac{(2d_0)}{\lambda} + 2\pi,$$

debido a la diferencia de camino óptico ($n = 1{,}38$) y al cambio de π en la reflexión.

Para que la interferencia sea destructiva, se debe cumplir la condición

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi; \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

La relación entre λ y d_0 para tener interferencia destructiva queda

$$d_0 = \frac{\lambda(m - \frac{1}{2})}{2n}$$

El valor mínimo para d_0 corresponde a $m = 1$, y vale $d_{0,\mathrm{min}} = 100\mathrm{nm}$.

(b)

De la relación de interferencia destructiva, tenemos

$$\lambda = \frac{2nd_0}{m - \frac{1}{2}}.$$

Para $m = 1$, se obtiene $\lambda_1 = 552\mathrm{nm}$. Para $m = 2$, se obtiene $\lambda_2 = 184\mathrm{nm}$, que queda fuera del espectro visible. Al considerar valores de m mayores, la longitud de onda correspondiente de onda será menor. Por lo tanto, solo para λ_1 se elimina la reflexión.

(c)

Repitiendo el razonamiento para un espesor $d_1 = 11d_0$, queda la condición para interferencia destructiva

$$\lambda = \frac{2nd_1}{m - \frac{1}{2}} = \frac{22nd_0}{m - \frac{1}{2}}.$$

Para $m = 6$, el valor correspondiente es $\lambda = 552\mathrm{nm}$. Para $m = 5$, $m = 7$ y $m = 8$, las longitudes de onda correspondientes, 674nm, 467nm y 405nm, también se encuentran en el espectro visible.