Solución examen diciembre 2018

Física 3

Ejercicio 1

a) Tomo una superficie esférica de radio a/2 y aplico Gauss:

$$\oint \vec{E}(a/2).\,d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Como $\vec{E}(a/2)$ y $d\vec{A}$ son colineales (ambos en dirección $\hat{e_r}$):

$$\oint \vec{E}(a/2).\,d\vec{A} = \oint E(a/2)\,dA$$

Por simetría E(a/2) es uniforme en las variables angulares por lo tanto lo puedo sacar de la integral:

$$\oint E(a/2)\,dA = E(a/2)\oint dA = E(a/2)4\pi(a/2)^2 = E(a/2)\pi a^2 = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

Por letra $a = 1m$ y $E(a/2) = 360N/C$ entonces:

$$q_1 = E(a/2)\pi a^2\epsilon_0 = 10nC$$

b) Tomo una superficie esférica concéntrica de radio r con $a < r < 2a$. Análogamente a la parte a se llega a que:

$$\oint \vec{E}(r).\,d\vec{A} = E(r)4\pi r^2$$

La carga encerrada es q_1 más la porción de carga del cascarón no conductor encerrada por la superficie. Llamémosla q_{2b}.

Como q_2 está distribuida uniformemente, la densidad de carga es:

$$\rho = \frac{q_2}{V} = \frac{q_2}{\frac{4}{3}\pi((2a)^3 - a^3)} = \frac{q_2}{\frac{4}{3}\pi(7a^3)}$$

$$\Rightarrow q_{2b} = \rho\frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3) = q_2\frac{r^3 - a^3}{7a^3}$$

$$\Rightarrow q_{enc} = q_1 + q_2\frac{r^3 - a^3}{7a^3}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}[q_1 + q_2\frac{r^3 - a^3}{7a^3}]$$

c) Despejando de la ecuación de la parte b:

$$q_2 = \frac{7a^3}{r^3 - a^3}[4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) - q_1]$$

De la letra $E(3a/2) = 0{,}206N/C$ entonces:

$$q_2 = -29nC$$

d) La carga total es $q_{tot} = -5nC$

$$q_{tot} = q_1 + q_2 + q_3 \Rightarrow q_3 = q_{tot} - q_1 - q_2 = 14nC$$

e) Tomo superficie de radio 3a. En este radio la superficie está incluida dentro del conductor, por lo tanto el campo eléctrico tiene que ser nulo.

$$\oint \vec{E}(3a).\,d\vec{A} = 0 = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{enc} = 0$$

Llamemos q_{in} a la carga en la superficie interior del conductor y q_sup a la ubicada en la superficie exterior.

$$q_{enc} = q_{in} + q_2 + q_1 = 0 \Rightarrow q_{in} = -q_1 - q_2 = 19nC$$

$$q_3 = q_{in} + q_{sup} \Rightarrow q_{sup} = q_3 - q_{in} = -5nC$$

Ejercicio 2

a) Del gráfico $I(0) = 0{,}25mA$ e $I(\infty) = 0{,}025mA$.

Como el condensador inicialmente está descargado, la diferencia de potencial instantánea en el mismo es cero, al igual que en la resistencia R_0.

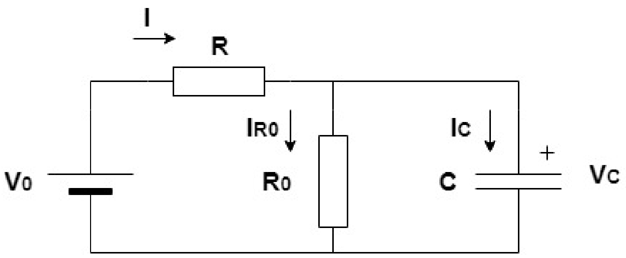
Aplicando mallas:

$$V_0 - RI(0) = 0 \Rightarrow R = \frac{V_0}{I(0)} = 40k\Omega$$

Cuando $t \to \infty$, el condensador se encuentra completamente cargado, por lo que la corriente a través de él es cero.

Aplicando mallas:

$$V_0 - RI(\infty) - R_0 I(\infty) = 0 \Rightarrow R_0 = \frac{V_0}{I(\infty)} - R = 360k\Omega$$



b) Aplicando nodos:

$$i = i_{R0} + i_c$$

$$i_c = \frac{dQ}{dt}$$

$$i_{R0} = \frac{V_c}{R_0} = \frac{Q}{R_0 C}$$

$$\Rightarrow i = \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{R_0 C}$$

$$V_0 - Ri - R_0 i_{R0} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{R + R_0}{RR_0 C} Q + \frac{V_0}{R}$$

Reconociendo la constante de tiempo $\tau = -\dfrac{RR_0C}{R + R_0}$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau} + \frac{V_0}{R}$$

Solución homogénea:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau} \Rightarrow Q_H(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Solución particular:

$$Q_p(t) = \frac{V_0 \tau}{R}$$

$$\Rightarrow Q(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{V_0 \tau}{R}$$

$$Q(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{V_0 \tau}{R} \Rightarrow Q(t) = \frac{V_0 \tau}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{CR_0} \Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R + R_0}(1 + \frac{R_0}{R} e^{-t/\tau})$$

Es compatible con los resultados obtenidos en a.

c) Reconocer que el tiempo característico que aparece en la figura corresponde a la constante de tiempo $\tau = 41{,}4ms$.

$$\Rightarrow C = \frac{\tau(R + R_0)}{RR_0} = 1,15\mu F$$

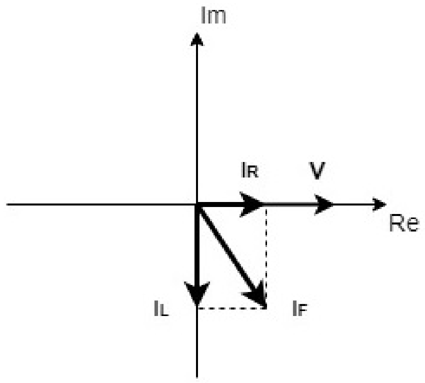
Ejercicio 3

a)

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \prec 0$$

$$I_L = \frac{V}{j\omega L} = \frac{V_0}{\omega L} \prec -90^o$$

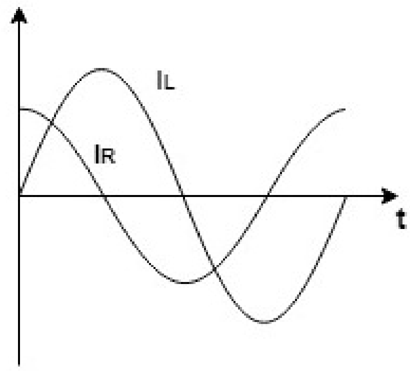
$$I_F = V\frac{(j\omega L + R)}{j\omega LR} = V_0\frac{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}{\omega LR} \prec -Arctg(\frac{R}{\omega L})$$



b)

$$i_R(t) = \frac{V_0}{R}cos(\omega t)$$

$$i_L(t) = \frac{V_0}{\omega L}sen(\omega t)$$



c)

$$\frac{V_0}{R}cos(\omega t_1) = \frac{V_0}{\omega L}sen(\omega t_1) \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega}Arctg(\frac{\omega L}{R})$$