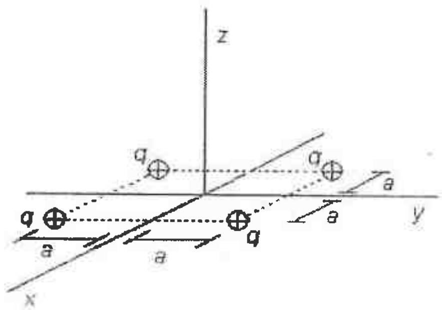
PROBLEMA 1

Considere cuatro cargas puntuales positivas de valor q>0 ubicadas en los puntos (a,a,0), (a,-a,0), (-a,a,0) y (-a,-a,0).

a) Calcule el potencial eléctrico en los puntos del eje z.

b) ¿Cual es la energía potencial eléctrica de una carga q' confinada a moverse sobre dicho eje?

c) Discuta en función del signo de q' si la posición de equilibrio z=0 es estable o inestable y en el caso que corresponda halle la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de q' en torno a ese punto.



Solución:

a) Sea P de coordenadas (0,0, z).

Por el principio de superposición, el potencial eléctrico en P será la suma de los potenciales generados por cada una de las 4 cargas. Dado que cada una de ellas se encuentra a distancia

$r = \sqrt{a^2 + a^2 + z^2} = \sqrt{2a^2 + z^2}$ del punto P y que las cargas son de igual valor, el potencial eléctrico en dicho punto será:

$$V(0,0,z) = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{2a^2+z^2}} = \frac{q}{\pi\varepsilon_o\sqrt{2a^2+z^2}}$$

b) La energía potencial de una carga q' ubicada en P será:

$$U = V(0,0,z).q' = \frac{qq'}{\pi\varepsilon_o\sqrt{2a^2+z^2}}$$

c) La fuerza eléctrica sobre la carga q' puede obtenerse, por ejemplo, calculando la derivada de la energía potencial:

$$\bar{F} = -\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = \frac{qq'}{\pi\epsilon_o}\frac{z}{(2a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

La posición de equilibrio z=0 será estable solamente si la fuerza que actúa sobre q' al desplazarla de dicha posición es restauradora. Así por ejemplo, si q' es desplazada hacia arriba (z>0) y dado que q>0 la fuerza apuntará hacia abajo solo si q'<0. En conclusión, la posición de equilibrio z=0 es estable sii q'<0. En este caso, aplicando la 2^{da} ley de Newton se obtiene:

$$\bar{F} = \frac{qq'}{\pi\epsilon_o}\frac{z}{(2a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} = m\vec{a} = m\ddot{z}\hat{k}$$

Reordenando:

$$\ddot{z} - \frac{qq'}{m\pi\epsilon_o}\frac{z}{(2a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Cerca de la posición de equilibrio ($z^2 \ll 2a^2$) el denominador del segundo término puede aproximarse como $(2a^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \approx (2a^2)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{2}a)^3$, por lo tanto la ecuación de movimiento se convierte en:

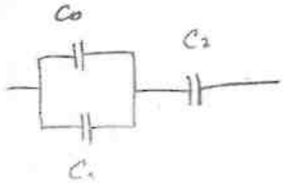
$$\ddot{z} + \frac{q(-q')}{m\pi\epsilon_o(\sqrt{2}a)^3}z = 0$$

Comparando con la ecuación típica de una oscilación ($\ddot{z} + w^2 z = 0$) se obtiene que la frecuencia de las pequeñas oscilaciones es:

$$w = \sqrt{\frac{-qq'}{m\pi\epsilon_o(\sqrt{2}a)^3}}$$

Ejercicio 2

a)



$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{(C_0 + C_1)C_2}{C_0 + C_1 + C_2}$$

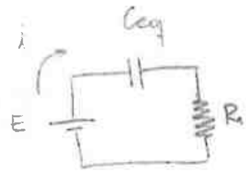
Donde

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 (H-h)D}{L-\ell} \qquad C_1 = \frac{\varepsilon_0 k_1 h D}{L-\ell} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 k_2 H D}{\ell}$$

Entonces

$$C_{eq} = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 D}{L-\ell}(H-h+k_1 h)\dfrac{H k_2}{\ell}}{\dfrac{\cancel{\varepsilon_0}(H-h)\cancel{D}}{L-\ell} + \dfrac{\cancel{\varepsilon_0} k_1 h \cancel{D}}{L-\ell} + \dfrac{\cancel{\varepsilon_0} k_2 H \cancel{D}}{\ell}} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 D H k_2 (H + h(k_1 - 1))}{\ell(H + h(k_1-1)) + k_2 H (L-\ell)}}$$

b)



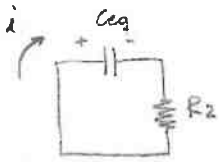
$$E - \frac{q}{C_{eq}} - iR_1 = 0 \qquad E - \frac{q}{C_{eq}} - \frac{dq}{dt}R_1 = 0$$

$$q_H \Rightarrow -\frac{q}{C_{eq}} - \frac{dq}{dt}R_1 = 0 \qquad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{R_1 C_{eq}} \Rightarrow q_H(t) = A_1 e^{-\frac{t}{R_1 C_{eq}}}$$

$$q_P \Rightarrow E - \frac{q}{C_{eq}} = 0 \Rightarrow q_P(t) = E C_{eq}$$

$$q(t) = A_1 e^{-\frac{t}{R_1 C_{eq}}} + E C_{eq} \qquad q(0) = 0 \Rightarrow A_1 = -E C_{eq} \Rightarrow \boxed{q(t) = E C_{eq}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C_{eq}}}\right)}$$

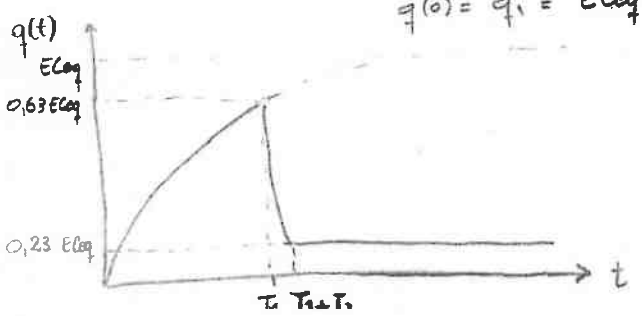
c)



$$-\frac{q}{C_{eq}} - iR_2 = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{t'}{R_2 C_{eq}} \Rightarrow q(t') = A_2 e^{\frac{-t'}{R_2 C_{eq}}}$$

con $t' = t - t_1$

$$q(0) = q_1 = E C_{eq}(1 - e^{-1}) = A_2 \Rightarrow \boxed{q(t') = E C_{eq}(1 - e^{-1})\, e^{-\frac{t'}{R_2 C_{eq}}}}$$



$(R_1 = 100 R_2)$

$\tau_1 = R_1 C_{eq}$

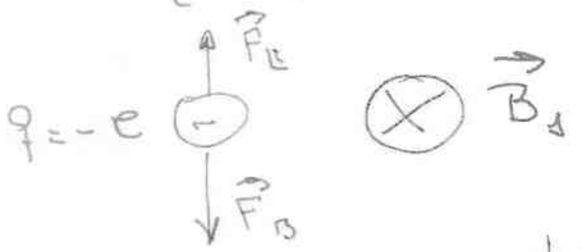
$\tau_2 = R_2 C_{eq}$

EJERCICIO 3

a) $\vec{F}_T = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{F}_E = q\vec{E}$



$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\,d$$

$$|\vec{E}| = \frac{\Delta V}{d}$$

$$-e|\vec{v}_0||\vec{B}_1| = -e\frac{\Delta V}{d}$$

$$|\vec{B}_1| = \frac{\Delta V}{d|\vec{v}_0|} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = \frac{\Delta V}{d|\vec{v}_0|}\hat{k}}$$

b) $|\vec{B}_2| = \dfrac{m|\vec{v}_0|}{|q|\,r}$ $\quad q = -e$

i) $r = a \Rightarrow \boxed{|\vec{B}_2| = \dfrac{m|\vec{v}_0|}{|q|\,a}}$

ii) $r = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \boxed{|\vec{B}_2| = \dfrac{2m|\vec{v}_0|}{|q|\,a}}$