

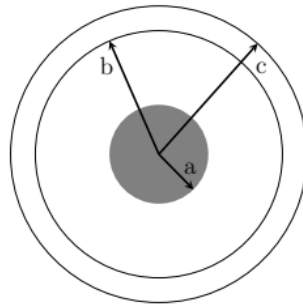
Primer Parcial de Física 3

2 de mayo 2024

Se deberán comunicar claramente los razonamientos seguidos para la resolución de los problemas propuestos. Las respuestas que no incluyan una correcta justificación serán consideradas incompletas.

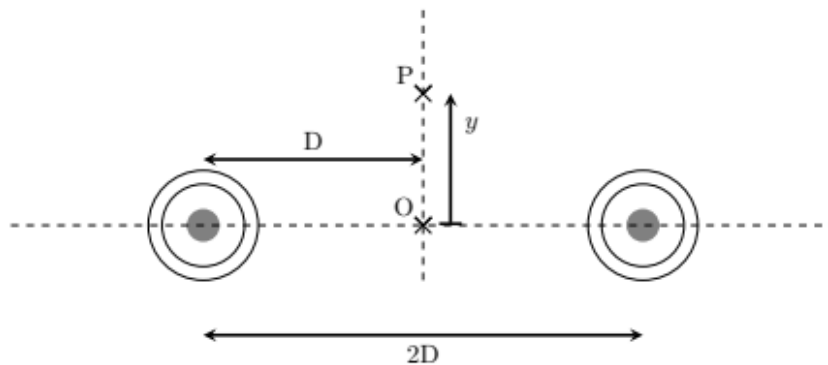
Ejercicio 1

Considere un cilindro muy largo, macizo, de radio a y largo L , no conductor, de densidad volumétrica de carga uniforme ρ positiva. Este cilindro está encerrado por otro cilindro, hueco, de carga neta nula, conductor, del mismo largo L , de radio interno b y radio externo c . Los ejes de ambos cilindros son coincidentes, como se muestra en la figura a continuación.



- a) Halle el campo eléctrico \vec{E} en todo el espacio e indique la carga acumulada en las superficies definidas por $r = b$ y $r = c$, donde r es una coordenada radial con origen en el eje de los cilindros, despreciando los efectos de borde.
- b) Grafique el módulo del campo eléctrico E en función de la coordenada radial r , indicando valores relevantes.

Ahora se dispone de dos sistemas idénticos al descrito anteriormente, con sus ejes separados por una distancia $2D$, como se indica en la figura debajo.



- c) Muestre que el campo eléctrico en un punto P , ubicado a una distancia y del punto O (que pertenece al plano que corta los cilindros a la mitad), está dado por

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho a^2 y}{\epsilon_0 (D^2 + y^2)} \hat{y}$$

- d) Una partícula de masa m y carga $-q$, donde $q > 0$ y es mucho menor que la carga de los cilindros, pasa por O con una velocidad v_0 hacia arriba. ¿Cuál debe ser el valor de v_0 para que se detenga a una distancia $d = \sqrt{3}D$ de O?

Nota: puede ser útil la siguiente relación $\int \frac{x dx}{D^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + D^2)$.

Ejercicio 2

Se tienen dos capacitores de capacitancia C , los cuales se pueden conectar en serie o en paralelo. En ambos casos se conecta un generador que aplica una diferencia de potencial V_0 al sistema y permanece conectado.

- Calcule la energía almacenada por los capacitores cuando se conectan en serie y cuando lo hacen en paralelo.
- Si uno de los capacitores se rellena con dieléctrico de constante K , determine la diferencia de potencial en los extremos del capacitor al que se le agregó el dieléctrico en los dos tipos de conexiones, en función de V_0 y K .
- Si ambas configuraciones (incluido el dieléctrico de la parte b) se desconectan de la diferencia de potencial V_0 y se conectan a una resistencia R . ¿Cuál configuración se descargará más rápido a un valor $\frac{Q}{e}$ donde Q representa la carga inicial respectiva de cada configuración?

Ejercicio 3

Considere el circuito correspondiente a la figura 1 que se compone de tres resistencias, un capacitor y una batería cuyo voltaje es V . Inicialmente las llaves S_1 y S_2 se encuentran abiertas y el capacitor C_1 se encuentra descargado.

- ¿Cuánto vale la corriente por R_1 al cerrar la llave S_1 ?

Ahora, en el instante que llamaremos $t = 0$ se cierra la llave S_2 .

- ¿Cuánto vale la corriente por R_1 en ese instante? ¿Y la corriente por R_2 ?
- ¿Cuál será carga final del capacitor C_1 ?

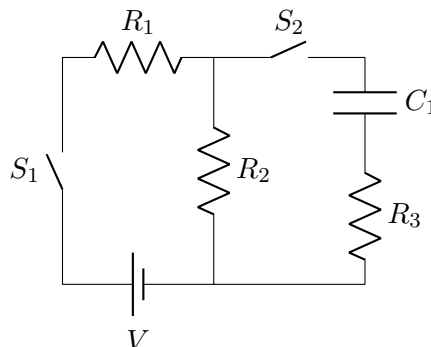


Figura 1: Diagrama del circuito

Solución ejercicio 1

(a) Para hallar el campo eléctrico en el interior del cilindro macizo tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de radio $r < a$, siendo su eje coincidente con el eje del cilindro macizo. Al aplicar la ley de Gauss obtenemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde $Q = \rho\pi r^2 L$. Por la simetría del problema podemos escribir:

$$E2\pi rL = \frac{\rho\pi r^2 L}{\epsilon_0},$$

de lo que se deduce

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{2\epsilon_0}, \text{ si } r < a.$$

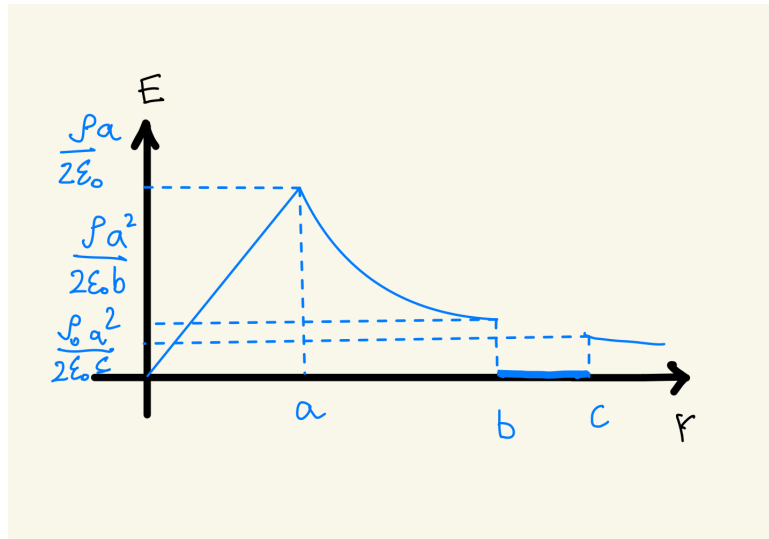
Para valores de $r > a$, la carga encerrada Q es constante y vale $Q = \rho\pi a^2 L$, por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}, \text{ si } a < r < b \text{ o } r > c.$$

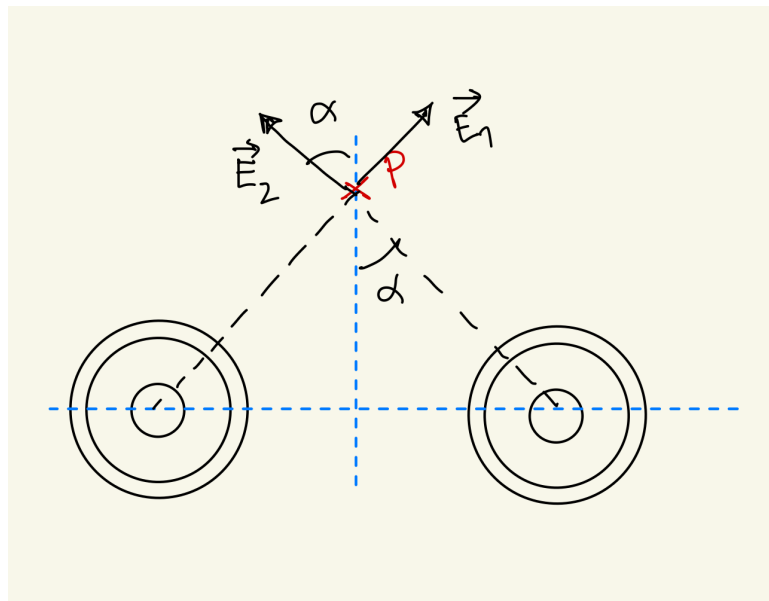
Para valores de r tales que $b < r < c$, $\vec{E} = 0$, debido a que el cascarón es conductor.

Para determinar la carga en las superficies definidas por $r = b$ y $r = c$ podemos usar nuevamente la ley de Gauss. Es fácil ver que el flujo a través de una superficie cilíndrica gaussiana con un radio $b < r < c$ es cero, ya que la superficie se encuentra completamente contenida en el interior de un material conductor. En consecuencia la carga encerrada es cero y, por lo tanto, $Q(r = b) = -\rho a^2 \pi L$. Como la carga neta del conductor es nula, entonces $Q(r = c) = -Q(r = b) = \rho a^2 \pi L$.

(b)



(c) El campo eléctrico total es la suma $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, como se muestra en la figura. Por otra parte, como el punto P es equidistante de los dos sistemas cilíndricos y como estos son idénticos, tenemos que $E_1 = E_2$.



En consecuencia, el campo eléctrico total tiene dirección vertical y su módulo es

$$E_T = 2E_1 \cos(\alpha) = 2E_1 \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}},$$

donde, de acuerdo a la parte a) $E_1 = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 \sqrt{D^2 + y^2}}$. Finalmente:

$$E_T = \frac{\rho a^2 y}{\epsilon_0 (D^2 + y^2)},$$

(d) Como la única fuerza que actúa sobre la carga es la fuerza eléctrica, entonces la energía de la partícula se conserva:

$$\Delta U + \Delta K = 0,$$

donde ΔU y ΔK refieren a la variación de energía potencial eléctrica y variación de energía cinética, respectivamente. Para hallar ΔU , podemos calcular en primer lugar ΔV :

$$\Delta V = - \int_0^{d=\sqrt{3}D} \vec{E} \cdot d\vec{y} = - \int_0^{d=\sqrt{3}D} \frac{\rho a^2 y dy}{\epsilon_0 (D^2 + y^2)} = - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \log(4).$$

Esto implica que

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v_0^2 = q \Delta V = - \frac{q \rho a^2 \log(4)}{2\epsilon_0},$$

entonces

$$v_0 = \sqrt{\frac{q \rho a^2 \log(4)}{m \epsilon_0}}$$

Solución Ejercicio 2

a) Conexión en serie:



Figura 2: Conexión en serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C}{2}$$

$$U = \frac{C V_0^2}{4}$$

Conexión en paralelo:

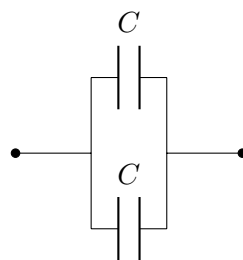


Figura 3: Conexión en paralelo

$$C_{eq} = C + C = 2C \Rightarrow U = C V_0^2$$

b) Serie:

$$C' = KC \Rightarrow V' = \frac{Q}{KC} \text{ con } Q = C_{eq} V$$

$$\Rightarrow V' = \frac{C_{eq}}{KC} V_0 \text{ con } \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{KC} + \frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{KC}{K+1} \Rightarrow V' = \frac{V_0}{K+1}$$

En paralelo el voltaje siempre será V_0

- c) Planteando Kirchhoff y usando las capacitancias equivalentes, en ambos casos la ecuación de descarga resultante es:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C_{eq}} + \dot{Q}R &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{1}{RC_{eq}} &= \frac{\dot{Q}}{Q} \end{aligned}$$

Para el caso en serie la frecuencia característica será $\frac{(K+1)}{RKC}$ y en paralelo $\frac{1}{(K+1)RC}$. Por lo tanto, los tiempos que demorarán en segundos son $(K+1)RC > \frac{RKC}{(K+1)}$. Será más rápido en serie.

Solución Ejercicio 3

- a) Para la parte 1, se tiene un circuito de una sola malla que consta de dos resistencias, R_1 y R_2 , y una batería V . Aplicando Kirchhoff obtenemos

$$V = R_1I + R_2I \rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

- b) En el instante $t = 0$, el capacitor está completamente descargado por lo que la diferencia de potencial entre sus placas es nula. Así, nos queda que las resistencias R_2 y R_3 están en paralelo por lo que podemos hallar su equivalente R_{23} .

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \rightarrow R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$$

Con la resistencia equivalente R_{23} calculada se tiene ahora un circuito de una sola malla compuesta por V , R_1 y R_{23} .

$$V = R_1I + R_{23}I \rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_{23}} = \frac{V(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Si llamamos I_2 a la corriente que circula por la resistencia R_2 y recorremos la malla que comprende a la resistencia R_1 y R_2 (nos olvidamos de la equivalente R_{23}). Obtenemos que

$$V = R_1I + R_2I_2 \rightarrow I_2 = \frac{V - R_1I}{R_2}$$

Con el I hallado en la parte anterior nos queda que

$$I_2 = \frac{VR_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

- c) Luego de suficiente tiempo, el condensador está cargado y no circula corriente por él. Su voltaje será igual al de R_2 :

$$\begin{aligned} V_{R_2} = IR_2 &= \frac{V}{R_1 + R_2}R_2 = \frac{Q}{C_1} \\ \Rightarrow Q &= \frac{VR_2C_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$