Soluciones al segundo parcial

Cálculo 3

2 de julio de 2013

Respuestas a los ejercicios de Múltiple Opción

1. D
2. A
3. D
4. B
5. E
6. D

Respuestas a los ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1.

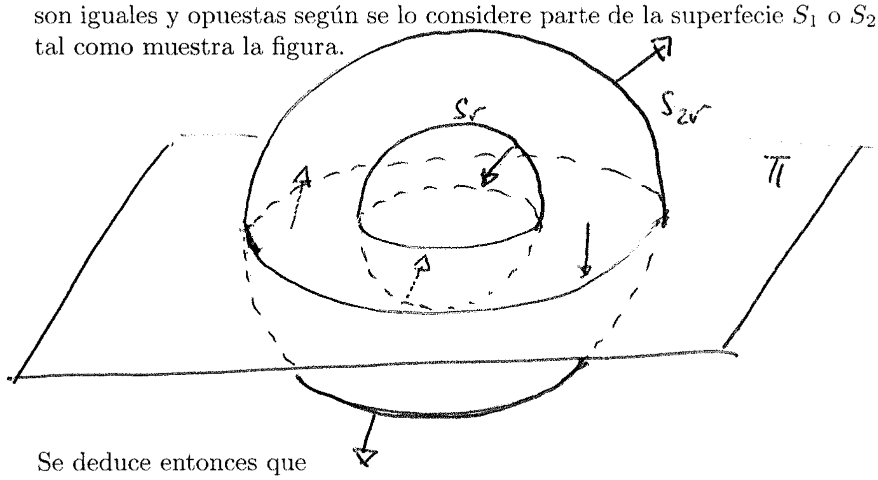
1. Ver teórico.
2. Sea Ω la región dada por

$$\Omega = \{(x, y, z) : \ r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < 4r^2\}.$$

Consideramos un plano π como en la figura, y dos superficies compactas y conexas, S_1, S_2 cada una de ellas orientadas con la normal saliente. Cada una de ellas determina una region Ω_1 y Ω_2 cuya union es Ω en consecuencia Recordando que X es solenoidal se tiene que

$$0 = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(X) = \iiint_{\Omega_1} \operatorname{div}(X) + \iiint_{\Omega_2} \operatorname{div}(X)$$

Ahora se puede aplicar en cada una de las integrales del segundo termino el teorema de Gauss. Observando que el plano π las normales salientes son iguales y opuestas según se lo considere parte de la superfecie S_1 o S_2 tal como muestra la figura.



Se deduce entonces que

$$\iint_{S_{2r}} X \cdot n\, dS = \iint_{S_r} X \cdot n\, dS.$$

3. Para probar que el campo dado es solenoidal, simplemente se calcula su divergencia y se ve que da cero.

   Por un argumento similar al de la parte anterior, el flujo de X a través del elipsoide S es igual al flujo de X a través de la esfera unitaria $E = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Calcularemos entonces $\iint_E X \cdot n\, dS$.

   Para $(x, y, z) \in E$, $X(x, y, z) = (x, y, z) = n(x, y, z)$, por lo que $X \cdot n(x, y, z) = 1$. Por lo tanto $\iint_E X \cdot n\, dS = \iint_E 1\, dS = \text{área}(E) = 4\pi$.

Ejercicio 2.

1. La condición $F = \text{rot}(G)$ quiere decir

$$\begin{cases} -M_z & = & -z \\ L_z & = & 0 \\ M_x - L_y & = & xy \end{cases}$$

   Integrando la primera ecuación tenemos que $M(x, y, z) = \frac{z^2}{2} + \alpha(x, y)$, y elegimos $\alpha = 0$. La segunda ecuación nos dice que $L(x, y, z)$ depende sólo de x e y. Entonces la tercera condición nos dice que $L(x, y, z) = -\frac{1}{2}xy^2 + \beta(x)$, y elegimos $\beta = 0$. Así,

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2}(-xy^2, z^2, 0).$$

2. Como $F = \text{rot}(G)$, por el teorema de Stokes

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \int_{\partial S} G \cdot ds.$$

El borde ∂S tiene dos componentes C_1 y C_{-1} que con las orientaciones correspondientes se parametrizan por

$$C_1 : \ (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1), \quad C_{-1} : \ (\operatorname{sen}(t), \cos(t), -1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$\int_{C_1} G{\cdot}ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\cos(t)\operatorname{sen}^2(t), 1, 0){\cdot}(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(t)\operatorname{sen}^3(t)+\cos(t))\, dt = 0$. Análogamente $\int_{C_{-1}} G \cdot ds = 0$, por lo que

$$\int\int_S F \cdot n\, dS = 0.$$

3. Ver teórico para probar que

$$\frac{1}{|S(t)|}\int_{\partial S(t)} G = \operatorname{rot}(G)(2,1,1) \cdot N,$$

siendo N la normal a $S(t)$ compatible con la orientación elegida en $\partial S(t)$. Tomando $N = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y la orientación correspondiente en $\partial S(t)$, tenemos que

$$\frac{1}{|S(t)|}\int_{\partial S(t)} G = F(2,1,1){\cdot}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-1,0,2){\cdot}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$