Universidad de la República **2 de julio de 2013**

Facultad de Ingeniería-IMERL

SEGUNDO PARCIAL: CALCULO III

Nº de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

RESPUESTAS					
1	2	3	4	5	6

Múltiple opción (Total: 30 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos, respuesta incorrecta: -1 punto, no respuesta: 0 punto.

Ejercicio 1

Se sabe que un campo F definido en $\mathbb{R}^3$ es solenoidal y cumple que

$$F(x,y,0) = (\sqrt{1+x^2+y^2}\cos x, e^x, y-1)$$
$$F(x,y,1) = (\sqrt{1+x^2+y^2}\cos x, e^x, 0).$$

Entonces su flujo a través de la superficie cilíndrica $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ orientada con la normal exterior es:

(A) π (B) $e^\pi/2$ (C) 0 (D) $-\pi$ (E) $2\pi^2$.

Ejercicio 2

Se considera la 1-forma $\eta = y^4dx + (y+z^2)dy + (z-y^2)dz$.
Entonces $d\eta$ es igual a:

(A) $(-2y-2z)dydz - 4y^3dxdy$ (B) 0 (C) $2dxdydz$ (D) $(2y-2z)dydz + 4y^3dxdy$ (E) $dxdz$.

Ejercicio 3

Sea el campo vectorial $X = (x^2 + 3yz^2, -2xy + 2z, k)$, donde $k \in \mathbb{R}$. El valor de k para que el campo X tenga un potencial vector de la forma $(A(x, y, z), B(x, y, z), 0)$, con $A(x, y, 0) = -3e^x - 2y$, $B(x, y, 0) = e^y + 2x$ es:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

Ejercicio 4

Sea S la superficie con borde $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$; $z \geq 0$ orientada de modo que en el polo norte el vector normal sea (0,0,-1). Entonces el flujo del campo $rot(y, -x, e^{xz})$ a través de S es:

(A) -2π (B) 2π (C) 0 (D) $\frac{2\pi}{3}$ (E) π.

Ejercicio 5

Se considera la superficie S dada por la ecuación $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ y el campo $F(x, y, z) = (x + y^2, -x, z - xy)$ entonces $\int\int_S F.ndS$ con la normal exterior vale:

(A) $\frac{8\pi}{3}$ (B) 0 (C) $-\frac{8\pi}{3}$ (D) $-\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$ (E) $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$.

Ejercicio 6

Sea C la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y el plano $x+y+z = 0$, orientamos C recorriéndola en sentido antihorario al verla desde abajo del plano $x + y + z = 0$. El valor de

$$\int_C zdx + xdy + ydz$$

es:

(A) -4π (B) 3π (C) $\sqrt{3}\pi$ (D) $-\sqrt{3}\pi$ (E) -3π.

Ejercicio de desarrollo (Total: 30 puntos)

Ejercicio 1

1. Enunciar el teorema de Gauss.

2. Se consideran el campo $X : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 solenoidal en su dominio y las superficies esféricas $S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Probar que $\iint\limits_{S_r} X = \iint\limits_{S_{2r}} X$ ambas integrales orientadas con la normal exterior.

3. Dado el campo $X(x,y,z) = (x,y,z)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$, probar que es solenoidal en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ y calcular $\iint\limits_{S} X$ con la normal exterior, siendo $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$.

Ejercicio 2

Sea $F(x,y,z) = (-z, 0, xy)$.

1. Hallar un campo de vectores G de clase C^1, de la forma $G(x,y,z) = (L(x,y,z), M(x,y,z), 0)$ tal que $F = rotG$ en todo $\mathbb{R}^3$.

2. Calcular
$$\iint_S F \cdot n \; dS,$$
donde S es el cono doble $z^2 = x^2 + y^2$ con $-1 \leq z \leq 1$.

3. Calcular
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{|S(t)|} \int_{\partial S(t)} G,$$
donde $S(t)$ es un disco circular de radio $t > 0$ y centro $(2,1,1) \in \mathbb{R}^3$ contenido en el plano $\{x + y + z = 4\}$, $|S(t)|$ denota el área de $S(t)$ y $\partial S(t)$ denota el borde del disco $S(t)$.