Universidad de la República **19 de julio de 2013**

Facultad de Ingeniería-IMERL

EXAMEN: CALCULO III

Nº de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

RESPUESTAS					
1	2	3	4	5	6

Múltiple opción (Total: 30 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos, respuesta incorrecta: -1 punto, no respuesta: 0 punto.

Ejercicio 1

Sea A un vector constante y $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Sea S una superficie orientada compacta tal que $\partial S = C$, orientando C coherentemente con la orientación de S. Entonces la circulación

$$\int_C A \times F$$

es igual a:

(A) $\iint_S A$.

(B) $2 \iint_S A$.

(C) $\iint_S (A \times X)$ donde X es un campo que cumple rot $F = X$.

(D) $\iint_S X$ donde X es el campo del ítem anterior.

(E) $-\iint_S A$.

Ejercicio 2

Sea $X : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $divX = 3$. Sea C el cubo centrado en el origen de arista 2 y S la superficie esférica dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, además se sabe que el flujo saliente del campo X sobre el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| = 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| = 1\}$ es 24.
Entonces el flujo de X a través de S con normal apuntando hacia adentro es:

(A) $32\pi - 48$.

(B) 0.

(C) $48 - 32\pi$.

(D) 32π.

(E) -32π.

Ejercicio 3

Dadas la curva C parametrizada por $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $z(t) = e^t$ cuyo origen es $(1,0,1)$ y su extremo es $(-e^\pi, 0, e^\pi)$ y el campo $X(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$. Entonces

(A) $\int_C X = 0$ y la longitud de C es $\sqrt{3}\,(e^\pi - 1)$.

(B) $\int_C X = 2\,(e^{2\pi} - 1)$ y la longitud de C es $\sqrt{3}\,(1 - e^{2\pi})$.

(C) $\int_C X = 2\,(1 - e^{2\pi})$ y la longitud de C es $\sqrt{3}\,(e^\pi - 1)$.

(D) $\int_C X = 0$ y la longitud de C es $2\sqrt{3}$.

(E) $\int_C X = 2\,(e^{2\pi} - 1)$ y la longitud de C es $\sqrt{3}\,(e^\pi - 1)$.

Ejercicio 4

El plano tangente a la superficie determinada por la ecuación

$$xyz^2 + 2x^2yz^2 - 3xy + yz + y + 12 = 0$$

en el punto $(1, -1, 2)$ es:

(A) $17x - 12y + 13z = 55$.

(B) $17x + 12y + 13z = 55$.

(C) $x - y + 2z = 6$.

(D) $-17x + 12y + 13z = -55$.

(E) $x - y + 2z = -6$.

Ejercicio 5

Se consideran los campos $X = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $Y = \left(\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$. definidos en $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Se define además $V = \{(x,y) : y < -3\}$.

(A) Y es de gradientes en V pero no en U.

(B) Y no es de gradientes en U.

(C) X, Y y $X+Y$ son de gradientes en U.

(D) X y $X+Y$ son de gradientes en V, Y es de gradientes en U.

(E) X es de gradientes en U.

Ejercicio 6

Sea $P : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ dada por $P(t) = (1 + sen(t), cos(t) + \frac{6}{\pi}t, 1 + sen(t))$ la parametrización de una curva C y X el campo $X(x,y,z) = (2x+y, x, 1)$. Entonces $\int_C X$ vale:

(A) 9.

(B) -9.

(C) 0.

(D) -2.

(E) 2.

Ejercicio de desarrollo (Total: 30 puntos)

Ejercicio 1

1. Enunciar el Teorema de Green.

2. Probar que si C es un curva cerrada simple parametrizable a trozos y S su región interior, entonces se cumple que el área de S es igual a $\int_C \frac{-ydx}{2} + \frac{xdy}{2}$ donde se integra sobre C recorrida con la orientación antihoraria.

3. Usar el Teorema de Green para demostrar la formula de Shoelace para el área de un polígono. Consideremos un polígono de n lados cuyos vertices tienen coordenadas $(x_i, y_i), i = 1, ..., n$. (ordenados en sentido antihorario). Para simplicar hacemos $x_{n+1} = x_1$ e $y_{n+1} = y_1$. Probar que el área del polígono es:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}).$$

4. Utilizando la fórmula de la parte anterior, calcular el área del cuadrilátero determinado por los vértices $(1, -1)$, $(2, 4)$, $(-3, 2)$, $(-4, -4)$.

Ejercicio 2

Sea $X = (A, B, C) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Sea $\eta = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ una 2-forma.

1. Mostrar que $d\eta = divX dx \wedge dy \wedge dz$.

2. Sabiendo que $A = x + y$, $B = y^2$, $C = y + z$ calcular $\int_C d\eta$ siendo C el cubo de centro en el origen y de arista 1.