Universidad de la República **9 de diciembre de 2013**

Facultad de Ingeniería-IMERL

EXAMEN: CALCULO III
SOLUCIONES

Múltiple opción (Total: 30 puntos)

RESPUESTAS					
1	2	3	4	5	6
(D)	(B)	(A)	(C)	(C)	(B)

Ejercicio de desarrollo (Total: 30 puntos)

Ejercicio 1

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Utilizando la parte anterior, se tiene que basta integrar sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con la normal exterior, la cual en un punto (x, y, z) es $\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Entonces

$$\iint_S \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} . \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iint_S 1 = \textbf{área}(S) = 4\pi.$$

(d) Aplicamos el teorema de Gauss a la superficie compacta $S \cup T$ siendo $T = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, el vector normal es $(0, 0, -1)$, entonces, teniendo en cuenta que $div(X) = 3$ se tiene que $\iint_S X + \iint_T X = vol(V) = 2\pi$ y como $\iint_T X = \iint_T X.(0, 0, -1) = \iint_T (-z - xy) = -\iint_T xy$ la cual parametrizándola en polares queda igual a $-\int_0^1 u^2 du \int_0^{2\pi} cosvsinvdv = 0$. Luego $\iint_S X = 2\pi$.

Ejercicio 2

Se considera el siguiente campo definido en $\mathbb{R}^3$

$$X(x, y, z) = (xz - 1, -yz, 1 - e^x)$$

1. $\text{div}(X) = z - z = 0$.

2. Le llamamos $Y = (P, Q, R)$ y planteamos las ecuaciones $xz - 1 = -Q_z$, $-yz = P_z$, $1 - e^x = Q_x - P_y$ al resolverlo nos queda $Y(x, y, z) = (-yz^2/2 + a(x, y); z - xz^2/2 + b(x, y); 0)$ donde a y b cumplen $b_x - a_y = 1 - e^x$.

3. Le llamamos $Z = (P, Q, R)$ y planteamos las ecuaciones $xz - 1 = R_y - Q_z$, $-yz = -R_x$, $1 - e^x = Q_x$ al resolverlo nos queda $Z(x, y, z) = (0; x - e^x + b(y, z); yzx + a(y, z))$ donde a y b cumplen $a_y - b_z = -1$.

4. rot(W)=rot($Y - Z$)=rot(Y)-rot(Z)=0 y como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, se tiene que W es de gradientes.