Universidad de la República **9 de diciembre de 2013**

Facultad de Ingeniería-IMERL

EXAMEN: CALCULO III

N de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

RESPUESTAS					
1	2	3	4	5	6

Múltiple opción (Total: 30 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos, respuesta incorrecta: -1 punto, no respuesta: 0 punto.

Ejercicio 1

Consideramos la curva paramétrica $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (1 + 2t - t^2)(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ y la circunferencia de centro en $(0,0)$ y radio 1 orientada en sentido horario, que llamaremos C. Si $X : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ es un campo irrotacional tal que $\int_C X = 1/3$, entonces $\int_\gamma X =$

[(A)] $1/3$. [(B)] $-1/3$ [(C)] $2/3$. [(D)] $-2/3$. [(E)] 0.

Ejercicio 2

Consideremos la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $(3\cos t, 3\sin t, 4t)$. Entonces el triedro de Frenet en el punto $p = (-3, 0, 4\pi)$ es:

(A) $\overrightarrow{t} = (0, 3/5, 4/5)$; $\overrightarrow{n} = (1,0,0)$; $\overrightarrow{b} = (0, 4/5, -3/5)$.

(B) $\overrightarrow{t} = (0, -3/5, 4/5)$; $\overrightarrow{n} = (1,0,0)$; $\overrightarrow{b} = (0, 4/5, 3/5)$.

(C) $\overrightarrow{t} = (0, -3/5, 4/5)$; $\overrightarrow{n} = (3/25, 0, 0)$; $\overrightarrow{b} = (0, -4/5, 3/5)$.

(D) $\overrightarrow{t} = (0, -3, 4)$; $\overrightarrow{n} = (3, 0, 0)$; $\overrightarrow{b} = (0, -12, 9)$.

(E) $\overrightarrow{t} = (0, 3/5, 4/5)$; $\overrightarrow{n} = (1/5, 1/5, 0)$; $\overrightarrow{b} = (4/5, -4/5, 3/5)$.

Ejercicio 3

Se consideran

$$C_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 0\},$$
$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 1\}$$

ambas recorridas en sentido antihorario,

$$T_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\},$$
$$T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 1\},$$
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 < z < 1\}$$

y $X = (P, Q, R)$ un campo de clase C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ tal que $div(X) = 1$ y $rot(X) = (x, y, -2z)$. Entonces, si consideramos $\iint_S X$ con la normal saliente:

(A) $\iint_S X + \iint_{T_1} R - \iint_{T_0} R = 4\pi$, $\quad \int_{C_0} X - \int_{C_1} X = 8\pi$.

(B) $\iint_S X + \iint_{T_1} R - \iint_{T_0} R = 4\pi$, $\quad \int_{C_1} X - \int_{C_0} X = 8\pi$.

(C) $\iint_S X + \iint_{T_1} R + \iint_{T_0} R = 4\pi$, $\quad \int_{C_0} X - \int_{C_1} X = 8\pi$.

(D) $\iint_S X + \iint_{T_1} R + \iint_{T_0} R = 4\pi$, $\quad \int_{C_1} X - \int_{C_0} X = 8\pi$.

(E) $\iint_S X + \iint_{T_1} R - \iint_{T_0} R = 4\pi$, $\quad \int_{C_0} X - \int_{C_1} X = 4\pi$.

Ejercicio 4

Si C es la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y el plano $x + y + z = 0$, entonces $\left|\int_C ydx + zdy + xdz\right| =$

[(A)] $\pi r\sqrt{3}$. [(B)] 0. [(C)] $\pi r^2\sqrt{3}$. [(D)] $-\pi$. [(E)] π.

Ejercicio 5

El volumen del sólido $V = \{(x,y,z) \,:\, z \geq x^2 + y^2, \ \text{ y } z \leq 2\}$ es:

[(A)] $\pi/4$. [(B)] π. [(C)] 2π. [(D)] $\pi/8$. [(E)] $3\pi/8$.

Ejercicio 6

$(xdx + ydy - xz^2dz) \wedge (xydxdy - ydxdz + zdydz) =$

(A) $(xz + y^2 + x^2z^2y)dxdydz$.

(B) $(xz + y^2 - x^2z^2y)dxdydz$.

(C) $(xz - y^2 - x^2z^2y)dxdydz$.

(D) $(-xz + y^2 - x^2z^2y)dxdydz$.

(E) $(-xz - y^2 - x^2z^2y)dxdydz$.

Ejercicio de desarrollo (Total: 30 puntos)

Ejercicio 1

(a) Enunciar el teorema de Gauss.

(b) Sea X un campo solenoidal en $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$, S_1 y S_2 dos superficies regulares cerradas orientables disjuntas que encierran a p, orientadas con normal saliente. Probar que

$$\iint_{S_1} X\eta dS = \iint_{S_2} X\eta dS.$$

(c) Calcular el flujo del campo eléctrico (generado por una carga puntual en el origen)

$$E(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$$

a través de la superficie $\partial\mathcal{C}$ siendo $\mathcal{C}$ el cubo $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ orientado con la normal exterior.

(d) Calcular el flujo del campo $X = (x + 2y, y + z, z + xy)$ a través de la superficie S dada por $S = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ con normal hacia arriba.

Ejercicio 2

Se considera el siguiente campo definido en $\mathbb{R}^3$

$$X(x, y, z) = (xz - 1, -yz, 1 - e^x)$$

1. Mostrar que X es solenoidal.
2. Hallar Y potencial vector de X con la tercer coordenada nula.
3. Hallar Z potencial vector de X con la primer coordenada nula.
4. Mostrar que $W = Y - Z$ es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^3$.