Universidad de la República **18 de febrero de 2014**

Facultad de Ingeniería-IMERL

EXAMEN CALCULO III, SOLUCIONES

MULTIPLE OPCION

EJERCICICIO 1 (B)
EJERCICICIO 2 (C)
EJERCICICIO 3 (E)
EJERCICICIO 4 (B)
EJERCICICIO 5 (C).

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1

1. Planteamos $G = (P, Q, 0)$ y resolvemos el sistema $\begin{cases} e^y = Q_z \\ -ze^{z^2} = P_z \\ 2xy^2 = Q_x - P_y \end{cases}$ y se obtiene $G = \left(-\frac{1}{2}e^{z^2} + b(x,y), ze^y + a(x,y), 0\right)$ donde $a_x - b_y = 2xy^2$ y $G(0,0,0) = 0$, por ejemplo $G = \left(-\frac{1}{2}e^{z^2} + \frac{1}{2}, ze^y + x^2y^2, 0\right)$.

2. $\iint\limits_S F.ndS = \iint\limits_S rot(G).ndS = \int_C G = \int_C \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{z^2}\right) dx + (ze^y + x^2y^2)dy = \int_C x^2y^2dy =$
$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^3 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \left(1 - \sin^2 t\right) \cos t dt = 0$, donde C es la curva
$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ z = 0\right\}$.

3. Le llamamos $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 0 \ \right\}$. $\iint\limits_S F.ndS + \iint\limits_T F.ndS = \iiint\limits_V div(F) = 0$ con la normal exterior. Parametrizamos T mediante $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = 0$ y nos queda
$\iint\limits_T F.ndS = -\int_0^1 2u^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos v sin^2 v dv\right) du = 0.$

Ejercicio 2

1. Ver teórico.

2. Si C es una curva cerrada, entonces $\int_C \nabla H = 0$, luego $\int_C F = \int_C (G + \nabla H) = \int_C G + \int_C \nabla H = \int_C G$.

3. $F = (0, 2x) + \nabla H$ siendo $H(x,y) = x^4/4 + y^3/3 + 2xy$.
Por la parte anterior, se tiene que $\int_C F = \int_C 2xdy$ que parametrizando cada lado del triángulo que forma la curva C queda igual a $\int_0^2 2tdt - \int_{-1}^0 4tdt = 6$.