Universidad de la República | **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Primer Semestre 2014**

EXAMEN – LUNES 21 DE JULIO DE 2014

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del examen es 3 horas y media.
- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- Rotor de un campo vectorial: $\nabla \times F$
- Producto escalar de dos vectores: $v.\, w$
- Integral de línea de un campo vectorial: $\int_C F$

(I) Múltiple opción. Total: 40 puntos

Puntajes: 10 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4

Ejercicio 1

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x + y - 2z)(0, 2, -2)$ y γ la curva definida por la intersección de las superficies $x + y + z = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Entonces $|\oint_\gamma F|$ es:

A) $\pi\sqrt{12}$.
B) 12π.
C) 6.
D) 6π.
E) -12π.

Ejercicio 2

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^3 . Considere las siguientes afirmaciones:

i) $\alpha'(t).\, \alpha''(t) = 0$ para todo $t \in I$.
ii) La curvatura de α cumple $k(t) \geq 0$ para todo $t \in I$.
iii) La torsión de α cumple $\tau(t) \geq 0$ para todo $t \in I$.

Entonces:

A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
B) Sólo las afirmaciones i) y ii) son verdaderas.
C) Sólo la afirmación ii) es verdadera.
D) Sólo las afirmaciones i) y iii) son verdaderas.
E) Sólo la afirmación i) es verdadera.

Ejercicio 3

Considere la siguiente 2-forma en $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = (2xydx + 3ye^z dy + 2ydz) \wedge \left(x^3 e^z dx - x^2 e^z dz\right).$$

Entonces:

A) $d\omega = (9x^2ye^{2z} - 6xye^{2z})dx \wedge dy \wedge dz$.
B) $d\omega = 9x^2ye^{2z}dx \wedge dy - 6xye^{2z}dy \wedge dz$.
C) $d\omega = 0$.
D) $d\omega = xe^z(4x^2 - 6x^2ye^z - 6ye^z)dx \wedge dy \wedge dz$.
E) $d\omega = (-4x^3e^z + 3x^2ye^{2z})dx \wedge dy \wedge dz$.

Ejercicio 4

Considere el conjunto $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u^2 + v^2 \leq 1, \ u \geq 0, \ v \geq 0\}$ y la superficie $S = \varphi(D)$ parametrizada por la función $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, uv)$. El área de S es:

A) $\pi(\sqrt{6} - 4/3)$.
B) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{6})$.
C) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{6} - 4/3)$.
D) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{3} + 1/3)$.
E) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{3} - 1/3)$.

(II) Desarrollo. Total: 60 puntos

Problema 1 (12 puntos)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, abierto y conexo.

a) **(8 puntos)** Considere una función escalar $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y una curva $C \subset \Omega$ con punto inicial A y punto final B. Pruebe que $\int_C \nabla\Phi = \Phi(B) - \Phi(A)$.
b) **(4 puntos)** Considere un campo vectorial continuo $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Pruebe que si F es un campo de gradientes en Ω entonces $\oint_C F = 0$ para toda curva cerrada $C \subset \Omega$.

Problema 2 (18 puntos)

Considere el cubo $\Omega = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ y la superficie $S = \partial\Omega$. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x^2 + ze^{-y^2}, y^2 + xe^{-z^2}, z^2 + ye^{-x^2})$.

a) **(10 puntos)** Calcule el flujo del campo F a través de la superficie S.
b) **(8 puntos)** Calcule el flujo del campo $\nabla \times F$ a través de la superficie S.

Problema 3 (30 puntos)

Sean S_1 y S_2 dos superficies orientadas con bordes tales que $\partial S_1 = \partial S_2 = C$, y tales que las orientaciones de S_1 y S_2 inducen la misma orientación en C. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de rotores (esto es, $F = \nabla \times A$ para un campo vectorial A).

a) **(8 puntos)** Pruebe que el flujo de F a través de S_1 es igual al flujo de F a través de S_2.

b) **(10 puntos)** Pruebe que el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (e^{x+y} - xe^{y+z}, e^{y+z} - e^{x+y}, 2)$$

es un campo de rotores.

c) **(12 puntos)** Considere ahora la superficie S definida por la ecuación $z = e^{-(x^2+y^2)}$, con $z \geq 1/e$, orientada con la normal hacia arriba. Calcule el flujo del campo F a través de S, donde F es el campo definido en la parte anterior.

SOLUCIÓN

(I) Múltiple opción

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
A	C	D	C

(II) Desarrollo

Problema 1

a) Parametrizando la curva C con $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_C \nabla\Phi &= \int_a^b \nabla\Phi(r(t)).\, r'(t)dt = \int_a^b \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z'(t)\right] dt \\ &= \int_a^b \frac{d\Phi}{dt}(r(t))dt = \Phi(r(b)) - \Phi(r(a)) = \Phi(B) - \Phi(A).\end{aligned}$$

b) $F = \nabla\Phi$. De manera que considerando una curva cerrada C (con punto inicial y final $A = B$) y utilizando el resultado anterior:

$$\oint_C F = \oint_C \nabla\Phi = \Phi(B) - \Phi(A) = 0.$$

Problema 2

a) La divergencia del campo F es: $\nabla.\, F(x, y, z) = 2x + 2y + 2z$. Usando el Teorema de Gauss:

$$\int_S F.\, dS = \int_\Omega \nabla.\, F dv = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz(2x + 2y + 2z) = 3.$$

b) S es una superficie cerrada. Como consecuencia del Teorema de Stokes resulta:

$$\int_S \nabla \times F.\, dS = 0.$$

Problema 3

a) Utilizando dos veces el teorema de Stokes se tiene:

$$\int_{S_1} F.\, dS = \int_{S_1} \nabla \times A.\, dS = \oint_C A = \int_{S_2} \nabla \times A.\, dS = \int_{S_2} F.\, dS.$$

b) En el Teórico se probó que si un campo F, definido sobre un paralelepípedo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de lados paralelos a los ejes, cumple $\nabla.\, F = 0$ entonces es un campo de rotores. El mismo argumento puede extenderse al caso $\Omega = \mathbb{R}^3$. De manera que basta con verificar que $\nabla.\, F = 0$:

$$\nabla.\, F(x, y, z) = (e^{x+y} - e^{y+z}) + (e^{y+z} - e^{x+y}) = 0.$$

Otra manera de probar que F es un campo de rotores consiste en hallar explícitamente un potencial vector A.

c) Usando la parte a) calculamos la integral no sobre la superficie original S sino sobre el disco $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 1/e\}$, con normal $n = (0, 0, 1)$. Se tiene:

$$\int_S F.\, dS = \int_D F.\, dS = 2A(D) = 2\pi.$$