Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2014**

Segundo parcial – Jueves 3 de julio de 2014

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- Rotor de un campo vectorial: $\nabla \times F$
- Divergencia de un campo vectorial: $\nabla . F$
- Producto escalar de dos vectores: $v . w$
- Producto vectorial de dos vectores: $v \times w$
- Integral de superficie: $\int_S ... dS$

(I) Múltiple opción. Total: 40 puntos

Puntajes: 8 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1

Sea S la superficie cerrada cilíndrica de altura 2 y radio 1, centrada en el origen, y con su eje contenido en el eje z (esto es: la base del cilindro se encuentra en $z = -1$ y la tapa en $z = 1$). Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = (y^2 x, x^2 y, z(x^2 + y^2))$. Entonces el flujo saliente de F sobre S es:

A) π.
B) 0.
C) $-\pi$.
D) 2π.
E) $\frac{\pi}{6}$.

Ejercicio 2

Sean F y G campos vectorials de clase C^2 definidos en todo $\mathbb{R}^3$. Considere las siguientes afirmaciones:

i) $(\nabla \times F) . F = 0$.
ii) $\nabla . (F \times G) = (\nabla \times F) . G + (\nabla \times G) . F$.
iii) $\nabla . (\nabla \times F) = 0$.

Entonces:

A) Sólo la afirmación ii) es verdadera.
B) Sólo la afirmación iii) es verdadera.
C) Sólo las afirmaciones ii) y iii) son verdaderas.
D) Todas las afirmaciones son verdaderas.
E) Sólo las afirmaciones i) y ii) son verdaderas.

Ejercicio 3

Sea $S = \phi(U)$ una superficie paramétrica y $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar. La integral de f sobre la superficie S se define como:

A) $\int_U f \left(|| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} || \right) dudv$.
B) $\int_U f \circ \phi \, dudv$.
C) $\int_S f \circ \phi \, || \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} || dudv$.
D) $\int_S f \circ \phi \, dudv$.
E) $\int_U f \circ \phi \, || \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} || dudv$.

Ejercicio 4

Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = (2y + \arcsin x, e^{y^2}, y^2 + \ln(z^2 + 4))$. Sea C el contorno del triángulo con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$, con la orientación dada por el orden que indican los vértices. Entonces $\oint_C F$ es:

A) $-\frac{1}{3}$.
B) $\frac{1}{3}$.
C) 0.
D) $-\frac{1}{6}$.
E) $\frac{1}{6}$.

Ejercicio 5

Considere las siguientes 1-formas en $\mathbb{R}^3$: $\omega = e^{xyz} dx + (x^2 + y^2) dy$, $\tau = x dz$. Entonces:

A) $\omega \wedge \tau_{(1,1,1)} = e dx \wedge dz + 2 dy \wedge dz$, $d\tau_{(1,1,1)} = dx \wedge dz$, $d\omega_{(1,1,1)}((\pi, 0, \pi), (\pi, 0, \pi)) = 0$.
B) $\omega \wedge \tau_{(1,1,1)} = -e dx \wedge dz + 2 dy \wedge dz$, $d\tau_{(1,1,1)} = dz \wedge dx$, $d\omega_{(1,1,1)}((\pi, 0, \pi), (\pi, 0, \pi)) = (2 - e)\pi^2 + e^{\pi}$.
C) $\omega \wedge \tau_{(1,1,1)} = e dx \wedge dz + 2 dy \wedge dz$, $d\tau_{(1,1,1)} = dx \wedge dz$, $d\omega_{(1,1,1)}((\pi, 0, \pi), (\pi, 0, \pi)) = (2 - e) dx \wedge dy + e dz \wedge dx$.
D) $\omega \wedge \tau_{(1,1,1)} = x e^{xyz} dx \wedge dz + x(x^2 + y^2) dy \wedge dz$, $d\tau_{(1,1,1)} = dz \wedge dx$, $d\omega_{(1,1,1)}((\pi, 0, \pi), (\pi, 0, \pi)) = 0$.
E) $\omega \wedge \tau_{(1,1,1)} = x e^{xyz} dx \wedge dz + x(x^2 + y^2) dy \wedge dz$, $d\tau_{(1,1,1)} = dx \wedge dz$, $d\omega_{(1,1,1)}((\pi, 0, \pi), (\pi, 0, \pi)) = (2 - e) dx \wedge dy + e dz \wedge dx$.

(II) Desarrollo. Total: 20 puntos

Problema 1 (10 puntos)

Sea ϕ un campo escalar de clase C^2 definido en $\mathbb{R}^3$.

a) Pruebe que $\nabla.(\phi\nabla\phi) = ||\nabla\phi||^2 + \phi\nabla.(\nabla\phi)$.

Considere ahora un volumen V cuyo borde es la superficie S, con normal saliente unitaria n. Se sabe que:

- El volumen de V es 3.
- $||\nabla\phi||^2 = 7\phi$.
- $\nabla.(\phi\nabla\phi) = 30\phi$.
- ϕ no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcule $\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$.

Problema 2 (10 puntos)

a) Considere el campo vectorial $F(x,y,z) = \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}, sen(xy), y^2+z\right)$, definido para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Calcule $\nabla \times F$.

b) Considere ahora el campo vectorial $G(x,y,z) = \left(2y, \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}, y\cos(xy) + \frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$, definido para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, y el conjunto $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 9, z \in [-1,1]\}$. Sea S el borde de V. Calcule el flujo saliente del campo G a través de la superficie S.

SOLUCIÓN

(I) Múltiple opción

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
D	B	E	A	A

(II) Desarrollo

Problema 1

Sea ϕ un campo escalar de clase C^2 definido en $\mathbb{R}^3$.

a) Pruebe que $\nabla.(\phi\nabla\phi) = ||\nabla\phi||^2 + \phi\nabla.(\nabla\phi)$.

Hay dos maneras igualmente válidas de resolver esta parte del problema.

1. Usando la siguiente propiedad de la divergencia: $\nabla.(fX) = \nabla f \cdot X + f\nabla.X$. Tomamos $f = \phi$ y $X = \nabla\phi$ tenemos que
$$\nabla.(\phi\nabla\phi) = \nabla\phi\cdot\nabla\phi + \phi\nabla.(\nabla\phi) = ||\nabla\phi||^2 + \phi\nabla.(\nabla\phi).$$
2. Haciendo el cálculo directo, $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$, entonces $\phi\nabla\phi = \left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}, \phi\frac{\partial\phi}{\partial y}, \phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$.

$$\begin{aligned}
\nabla.(\phi\nabla\phi) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \phi\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \phi\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\\
&= ||\nabla\phi||^2 + \phi\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\\
&= ||\nabla\phi||^2 + \phi\nabla.(\nabla\phi).
\end{aligned}$$

Considere ahora un volumen V cuyo borde es la superficie S, con normal saliente unitaria n. Se sabe que:

b) Aplicando el teorema de Gauss tenemos que $\displaystyle\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \int_S \nabla\phi\cdot n dS = \int_V \nabla.(\nabla\phi)dV$.

Por lo probado en la parte anterior: $\phi\nabla.(\nabla\phi) = \nabla.(\phi\nabla\phi) - ||\nabla\phi||^2 = 30\phi - 7\phi = 23\phi$. Como ϕ no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}^3$ concluimos que $\nabla.(\nabla\phi) = 23$. Entonces
$$\int_V \nabla.(\nabla\phi)dV = \int_V 23dV = 23\,\mathrm{vol}(V) = 69.$$

Problema 2

a) Sea $F(x,y,z) = \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}, sen(xy), y^2+z\right)$, entonces

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \frac{1}{x^2+y^2+z^2} & sen(xy) & y^2+z \end{vmatrix} = \left(2y, \frac{-2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, ycos(xy) + \frac{2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right).$$

b) Por lo visto en la parte anterior $G(x,y,z) = \nabla\times F(x,y,z)$, entonces $\displaystyle\int_S G\cdot dS = \int_S \nabla\times F\cdot dS$.

Como S es una superficie cerrada se cumple que $\displaystyle\int_S \nabla\times F\cdot dS = 0$. Entonces $\displaystyle\int_S G\cdot dS = 0$.