Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2014**

PRIMER PARCIAL – MIÉRCOLES 14 DE MAYO DE 2014

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

La siguientes fórmulas pueden ser de utilidad:

- Si $\gamma = \gamma(t)$ es una curva diferenciable en $\mathbb{R}^3$, la curvatura k y la torsión τ están dadas por $k = \frac{\|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3}$, $\tau = \frac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma\|^2}$.
- $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$, $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3}{4}\pi$, $\int_0^{2\pi} \cos^6 t\, dt = \frac{5}{8}\pi$.

(I) Múltiple opción. Total: 25 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1

Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\alpha(t) = \big(t, -t^2, 1+t^3\big)$, con $t \in \mathbb{R}$. Entonces:

A) La curva está parametrizada por longitud de arco.
B) La torsión en el punto $P = (0,0,1)$ es $\tau = -3$.
C) La curva es plana y su curvatura en el punto $P = (0,0,1)$ es $k = 2$.
D) El radio de curvatura en el punto $P = (0,0,1)$ es $\rho = 1/4$.
E) La curva está contenida en una recta.

Ejercicio 2

Considere las siguientes afirmaciones:

i) La parametrización de una curva es única.
ii) La integral de línea de un campo vectorial a lo largo de cualquier curva cerrada es cero.
iii) Todo campo vectorial conservativo en $\mathbb{R}^n$ es el gradiente de un campo escalar.

Entonces:

A) Sólo la afirmación i) es verdadera.
B) Sólo las afirmaciones i) y iii) son verdaderas.
C) Sólo las afirmaciones ii) y iii) son verdaderas.
D) Todas las afirmaciones son falsas.
E) Sólo la afirmación iii) es verdadera.

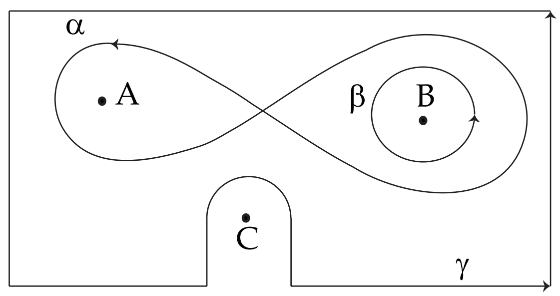
Ejercicio 3

El área encerrada por la curva plana definida por: $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, es:

A) $\frac{3}{8}\pi$.
B) 0.
C) $\frac{1}{24}\pi$.
D) 2π.
E) $\frac{3}{4}\pi$.

Ejercicio 4

Considere un campo vectorial $X : \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\} \to \mathbb{R}^2$ irrotacional. Considere además las curvas cerradas α, β y γ como se muestran en la siguiente figura:



Se sabe que $\int_\alpha X = 1$ y que $\int_\beta X = 3$. Entonces:

A) $\int_\gamma X = -2$.
B) $\int_\gamma X = 2$.
C) $\int_\gamma X = 4$.
D) $\int_\gamma X = 0$.
E) $\int_\gamma X = 7$.

Ejercicio 5

Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$. Considere además la curva α que va desde $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ y está definida por la intersección de las superficies $x - y = 0$, $z = \frac{x^2+y^2}{2}$. Entonces:

A) El campo F es conservativo y $\int_\alpha F = 2$.
B) El campo F es conservativo y $\int_\alpha F = 0$.
C) El campo F no es conservativo y $\int_\alpha F = 2$.
D) El campo F no es conservativo y $\int_\alpha F = 0$.
E) El campo F es conservativo y $\int_\alpha F = \pi$.

(II) Desarrollo. Total: 15 puntos

Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema 1 (9 puntos)

Considere una carga eléctrica q colocada en el punto $p_1 = (-2, 0)$ y otra carga eléctrica de signo opuesto $-q$ colocada en el punto $p_2 = (2, 0)$. Sea $E : \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\} \to \mathbb{R}^2$ el campo eléctrico total debido a esas dos cargas, esto es:

$$E(x, y) = \frac{q}{[(x+2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}(x+2, y) - \frac{q}{[(x-2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}(x-2, y).$$

a) Calcule $\int_\alpha E$ cuando α es el segmento de recta horizontal que va del punto $A = (-1, 0)$ al punto $B = (1, 0)$.

b) Calcule $\int_\beta E$ cuando β es el segmento de recta vertical que va del punto $A = (0, -2)$ al punto $B = (0, 2)$.

c) Calcule $\int_\gamma E$ cuando γ es la circunferencia de radio 1 con centro en $(2, 0)$ recorrida en sentido antihorario.

Problema 2 (6 puntos)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $C^1(\Omega)$.

a) Pruebe que si F es un campo de gradientes entonces es irrotacional.

b) Dé un ejemplo de un campo irrotacional que no es de gradientes. Especifique qué condiciones sobre Ω y F garantizan que un campo irrotacional sea de gradientes en Ω.

SOLUCIÓN

(I) Múltiple opción

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
B	E	A	E	A

(II) Desarrollo

Problema 1

Hay dos maneras igualmente válidas de resolver cada una de las partes del problema:

Opción 1: Calcular explícitamente las integrales de línea.

Opción 2: Observar que el campo eléctrico es un campo gradiente con potencial escalar

$$\Phi(x,y) = -\frac{q}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}.$$

De manera que:

a) $\int_\alpha E = \Phi(1,0) - \Phi(-1,0) = \frac{4}{3}q$.

b) $\int_\beta E = \Phi(0,2) - \Phi(0,-2) = 0$ (observar que el campo E es ortogonal al segmento de recta vertical en cada punto de la trayectoria).

c) $\int_\gamma E = 0$, pues γ es una curva cerrada.

Problema 2

a) Denotamos $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Por hipótesis: $F(x,y) = \nabla\Phi(x,y)$, donde Φ es un potencial escalar de F.

Así que, para cada $(x,y) \in \Omega$: $P(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)$, $Q(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)$. Tomando derivadas y usando que el orden de las derivadas parciales puede cambiarse (por ser Φ de clase $C^2(\Omega)$):

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y),$$

Por lo tanto $\nabla \times F(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$.

b) El campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

definido sobre $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, es irrotacional pero no es de gradientes en Ω, pues la integral sobre una curva cerrada alrededor del origen no es cero (es fácil verificar que $\int_\alpha F = 2\pi$, si α es una circunferencia centrada en el origen recorrida en sentido antihorario).

Condiciones que garantizan que un campo irrotacional es de gradientes en Ω:

- Ω es simplemente conexo (no tiene agujeros).
- Ω tiene agujeros y la integral de F sobre cualquier curva cerrada alrededor de un agujero es cero (alcanza con verificar para una única curva cerrada alrededor de cada agujero).