Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso Anual 2014**

Segundo Parcial
27 de Noviembre de 2014

Cédula	Apellido y Nombre

1. *a*) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ un subconjunto. Definir los siguientes conceptos:
   1) X es linealmente independiente.
   2) X es linealmente dependiente.

   b) Supongamos ahora que $X = \{x_1, x_2\}$. Probar que X es linealmente independiente si y solo si uno de los vectores es múltiplo del otro.

   c) Dar un ejemplo de un espacio vectorial V y un subconjunto $X \subset V$ que muestre que el item anterior no es cierto si X tiene más de dos vectores.

   d) Supongamos ahora que $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ tiene n elementos nuevamente. Probar que si X es linealmente independiente, entonces el subconjunto $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ también debe ser linealmente independiente.

   e) Probar que si $Z = \{z_1, \dots, z_k\} \subset V$ es un subconjunto linealmente dependiente y $w_1, \dots, w_n$ son elementos cualesquiera de V, entonces el conjunto $U = \{z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_n\}$ es linealmente dependiente.

2. Se considera la función $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por $T(p) = p'$ (la derivada de p).

   a) Probar que T es una transformación lineal.

   b) Hallar el núcleo y la imagen de T.

   c) Si consideramos las bases $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$ y $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$, hallar las matrices asociadas ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}$ y ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$. (Aclaración: no es necesario probar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases.)

3. Se considera
   $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2\alpha, y = -2\alpha, z = -\alpha\}$.

   a) ¿Son S_1 y S_2 subespacios vectoriales? Justificar.

   b) Determinar si $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

   c) Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1), (0,1,3), (-2,2,1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,-1), (2,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Se considera $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformación lineal tal que

   $$ {}_{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} $$

   Hallar $T(x, y, z)$.