Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

SOLUCIÓN – EXAMEN 23 DE FEBRERO DE 2024.

Ejercicio 1.

Parte 1. Fijado $x \in [0,1]$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $2/n < x$. Luego, por definición de $\{f_n\}$ se tiene que $f_n(x) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Lo que implica que $f_n \to 0$ puntualmente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
Parte 2. Para estudiar la convergencia uniforme, calculemos

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Luego, si $\alpha < 0$ se tiene que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ y por lo tanto no hay convergencia uniforme. Si $\alpha = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$ y por lo tanto no hay convergencia uniforme. Si $\alpha > 0$ se tiene que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ y por lo tanto hay convergencia uniforme.

Ejercicio 2. Ver notas del curso.

Ejercicio 3.
Queremos probar que:

$$x^2 = 2\left(\pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right), \text{ para todo } x \in [0, 2\pi].$$

Eso es equivalente a probar que:

$$x^2 - 2\pi x = 2\left(-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right), \text{ para todo } x \in [0, 2\pi].$$

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua, y par, con derivada continua a trozos, $f(x + 4\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y tal que $f|_{[0,2\pi]} = x^2 - 2\pi x$.
Calculemos los coeficientes de Fourier de f:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3} - \pi x^2\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi^2}{3}.$$

donde la segunda igualdad vale porque f es par.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2\pi}\right)dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx - 2\int_0^{2\pi} x\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx. \end{aligned}$$

Nuevamente, en la segunda igualdad usamos la paridad de f. Calculemos cada integral por separado:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2x.\cos(\frac{nx}{2})}{(\frac{n}{2})^2}+\left(\frac{x^2}{\frac{n}{2}}-\frac{2}{(\frac{n}{2})^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi.\cos(n\pi)}{(\frac{n}{2})^2} = \frac{16}{n^2}(-1)^n$$

$$2\int_0^{2\pi} x\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx = 2\left(\frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{(\frac{n}{2})^2}+\frac{x\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{(\frac{n}{2})}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\left(\frac{\cos(n\pi)-1}{(\frac{n}{2})^2}\right) = \frac{8}{n^2}(-1)^n-\frac{8}{n^2}$$

Por lo tanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx - 2\int_0^{2\pi} x\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx = \frac{8}{n^2}(1+(-1)^n)$$

Por otro lado, ya sabemos que $b_n = 0$ porque f es una función par.
Como f es continua en todo $\mathbb{R}$ y existen las derivadas laterales en todo punto, usando el Teorema de Dini se tiene que para todo $x \in [0, 2\pi]$:

$$f(x) = x^2 - 2\pi x = -\frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{n^2}(1+(-1)^n)\cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Si $n = 2k+1$ se tiene que $1+(-1)^n = 0$. Por lo tanto, tomando $n = 2k$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{n^2}(1+(-1)^n)\cos\left(\frac{nx}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{8}{(2k)^2}(1+(-1)^{2k})\cos\left(\frac{(2k)x}{2}\right) = 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

Ejercicio 4.

Busquemos soluciones de la forma:

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{1}$$

1. $u_t = u_{xx} + u \Rightarrow T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + T(t)X(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)+X(x)}{X(x)}\cdot$ En esta última igualdad tenemos una función que depende del tiempo igualada a una función que depende de la posición. De modo que:

$$\frac{d}{dx}\frac{T'}{T}(t) = \frac{d}{dt}\frac{X''+X}{X}(x) = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T}(t) = \frac{X''+X}{X}(x) = \lambda \text{ (cte)}.$$

   Por lo tanto, podemos obtener el siguiente problema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de una ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} X'' + (1-\lambda)X = 0 \\ T' - \lambda T = 0. \end{cases}$$

2. Como $u(t,0) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) = 0$ o $X(0) = 0$. Si $T(t)$ fuese la función nula tendríamos que $u(t,x) = 0$, que no verifica la condición inicial $u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\cdot$ Por lo tanto la opción que nos sirve es $X(0) = 0$.

3. $u(t,\pi) = T(t)X(\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$. Descartamos la opción $T(t) = 0$ por la misma razón que en el caso anterior.

En resumen:

$$\begin{cases} X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Por comodidad llamaremos $\lambda' = \lambda - 1$. Por lo tanto la ecuación $X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0$ se transforma en $X''(x) - \lambda' X(x) = 0$. Las posibles soluciones de esa ecuación dependen del signo de λ':

- Caso (a): $\lambda' > 0$.
  Si $\lambda' > 0$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda' = \alpha^2$.

  $$\lambda' = \alpha^2 \Rightarrow X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

  Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(\pi) = Ae^{\alpha\pi} + Be^{-\alpha\pi} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } A = B = 0$$

  La primera condición no es válida ya que supusimos $\lambda' = \alpha^2 > 0$. La segunda tampoco es válida ya que obtendríamos $X(x) = 0$ lo que resultaría nuevamente en la función $u(t,x) = 0$. Por ende, λ' no podrá ser mayor a cero.

- Caso (b): $\lambda' = 0$.
  $\lambda' = 0$ implica que $X'' = 0$, integrando dos veces, obtenemos que

  $$X(x) = Ax + B$$

  Nuevamente, imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\begin{cases} X(0) = B = 0 \\ X(\pi) = A\pi + B \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$$

  Nuevamente se obtendría la solución trivial la cual no es válida. Por lo tanto, λ' tampoco podrá ser cero.

- Caso(c): $\lambda' < 0$. Si λ' es negativo, existe algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda' = -\alpha^2$.

  $$\lambda' = -\alpha^2 \Rightarrow X(x) = A\cos(\alpha x) + B\operatorname{sen}(\alpha x)$$

  Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(\pi) = B\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0 \text{ o } \operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0$$

  Si consideramos la primera opción, obtenemos la solución trivial. Si se verifica la segunda opción:

  $$\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \Rightarrow \alpha\pi = n\pi \Rightarrow \alpha = n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

  $$\Rightarrow X(x) = B_n \operatorname{sen}(nx).$$

  Como $\alpha = n$ entonces $\lambda' = -n^2$ y por lo tanto $\lambda = 1 - n^2$.

Volviendo a la ecuación $T' - \lambda T = 0$ tenemos que $T(t) = C_n e^{(1-n^2)t}$. Así, nuestra solución al problema sería de la forma:

$$u_n(t,x) = X(x)T(t) = A_n \operatorname{sen}(nx) e^{(1-n^2)t}, \text{ donde } A_n = B_n C_n.$$

Falta imponer la condición $u(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$. Como

$$u(0,x) = A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}.$$

no es posible hallar una única constante A_n que verifique la condición anterior. Como la ecuación $u_t = u_{xx} + u$ es lineal, cualquier combinación lineal finita de soluciones será solución. Esto sugiere buscar un candidato a solución de la forma:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) e^{(1-n^2)t}.$$

Así:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \text{ y tomamos } A_n = \frac{1}{n^2}.$$

Luego, nuestro candidato a solución es:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx) e^{(1-n^2)t}}{n^2}.$$

Parte 2.

Vamos a utilizar los siguientes resultados:

Proposición 0.1
Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ que verifica:

- $|u_n(t,x)| \leq M_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $(t,x) \in X$,
- *la serie* $\sum M_n$ *es convergente*

Entonces existe $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $\sum u_n$ converge uniformemente a u en X.

Proposición 0.2
Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ continuas tales que $\sum u_n$ converge uniformemente a u en X. Entonces u es continua en X.

Sea $u_n(t,x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx) e^{(1-n^2)t}}{n^2}$. Entonces

$$|u_n(t,x)| = \left| \frac{\operatorname{sen}(nx) e^{(1-n^2)t}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

ya que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para todo x y $e^{(1-n^2)t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Luego, por la proposición 0.1 , se tiene que $\sum u_n$ converge uniformemente a una función u. Como los sumandos u_n son continuos, por la proposición 0.2 se tiene que u es continua en $[0,+\infty) \times [0,\pi]$.

Parte 3. Vamos a utilizar el siguiente resultado:

Proposición 0.3 (Derivada respecto de t)

Sea $S_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. *Si:*

- $S_n(t,x)$ *converge uniformemente a* $\sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x)$ *en* X.
- $S_{n_t}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$ *converge uniformemente a* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$ *en* X.

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x) \text{ para todo } (t,x) \in X.$$

Observación: Basta con pedir que $S_n(t_0,x_0)$ converja en algún punto $(t_0,x_0) \in X$. No es necesario pedir que $S_n(t,x)$ converja uniformemente.

Ya probamos que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x)$ converge uniformemente en $(0,+\infty) \times (0,\pi)$.
Sea $\delta > 0$ y t tal que $t > \delta$. Entonces se tiene que $(1-n^2)t < (1-n^2)\delta$ y por lo tanto $e^{(1-n^2)t} < e^{(1-n^2)\delta}$. Entonces:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x) \right| = \left| (1-n^2) \frac{\operatorname{sen}(nx) e^{(1-n^2)t}}{n^2} \right| \leq e^{(1-n^2)\delta} \text{ para todo } (t,x) \in (\delta,+\infty) \times (0,\pi).$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{(1-n^2)\delta}$ converge, por la proposición 0.1 la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x)$ converge uniformemente en $(\delta,+\infty) \times (0,\pi)$. Luego, aplicando la proposición 0.3, se cumple que $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x)$ para todo $(t,x) \in (\delta,+\infty) \times (0,\pi)$. Como este razonamiento vale para todo $\delta > 0$, se concluye esa igualdad que vale para todo $(t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi)$.