Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

Examen – 23 de febrero de 2024. Duración: 3:00 hs.

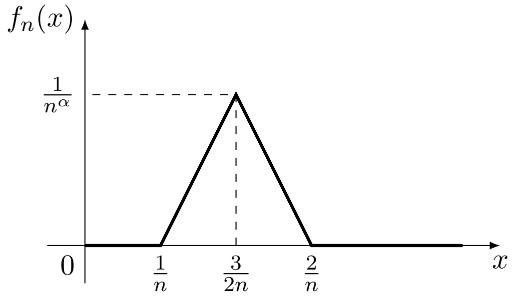
Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

- El puntaje total del examen es de 100 puntos. El mínimo para aprobar es 60 puntos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- Todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.

PARA USO DOCENTE				
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	**Total**

Ejercicio 1. (20 puntos)

Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como en la siguiente figura, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.



1. Estudiar convergencia puntual en $[0,1]$, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$. (10 puntos)
2. Estudiar convergencia uniforme en $[0,1]$, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$. (10 puntos)

Ejercicio 2. (25 puntos)

Enunciar y demostrar el segundo teorema de Liapunov (Liapunov 2).

Ejercicio 3. (20 puntos)

Usando series de Fourier, probar que:

$$x^2 = 2\left(\pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right), \text{ para todo } x \in [0, 2\pi].$$

Enunciar los resultados que se utilicen.

Ejercicio 4. (35 puntos)

Sea $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua y de clase C^2 en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$ que verifica:

- $u_t = u_{xx} + u$, en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$.
- $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty).$
- $u(0, x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$, $\forall x \in [0, \pi]$.

1. Usando el método de separación de variables, hallar un candidato a solución que sea de la forma $u(t, x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x)$. (10 puntos)
2. Probar que el candidato hallado en la parte anterior es continuo en $[0, +\infty) \times [0, \pi]$. Enunciar los resultados que se utilicen. (10 puntos)
3. Probar que $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t, x)$. Enunciar los resultados que se utilicen. (15 puntos)

Se recuerda:

$$\int x \operatorname{sen}(ax) dx = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} + K$$

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \operatorname{sen}(ax)}{a} + K$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(ax) dx = \frac{2x \operatorname{sen}(ax)}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos(ax) + K$$

$$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{2x \cos(ax)}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \operatorname{sen}(ax) + K$$
