Introducción Ecuaciones Diferenciales
Examen febrero

25 de febrero de 2023.

No. Examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. a) Definir punto crítico (o punto de equilibrio) estable para el futuro. (5 puntos)
   b) Enuncie y demuestre el Teorema 1 de Liapunov. (15 puntos)

2. Resolver la siguiente ecuación:
$$x^{''} - 2x^{'} + 2x = sen(t) - 2cos(t), \text{ con } x(0) = 0,\ x^{'}(0) = 2. \quad \text{(20 puntos)}$$

3. Dibujar los diagramas de fase y estudiar estabilidad de los puntos críticos para las siguientes ecuaciones:

   a) $\begin{cases} x^{'} = -x(sen(\pi x))^2 \\ y^{'} = 0 \end{cases}$ (10 puntos)

   b) $X^{'} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} X$. (10 puntos)

4. Se considera la ecuación:
$$\begin{cases} x^{'} = 2y^3 \\ y^{'} = -x \end{cases}$$
Probar que el origen es estable, no asintóticamente estable. (20 puntos)
Se suguire considerar $V(x, y) = x^2 + y^m$ con $m \in \mathbb{N}$.

5. Hallar $u(x, y) \in C^{\infty}$ tal que
$$\begin{cases} 2xu_x - yu_y = 0 \\ u(x, x) = x^3. \end{cases} \quad \text{(20 puntos)}$$
Sugerencia: buscar soluciones $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Para aprobar el examen el puntaje mínimo es 55 puntos y un problema entero bien.

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales
Solución del examen de febrero

1. Ver notas de teórico.

2. Primero estudiamos la ecuación homogénea

$$x'' - 2x' + 2x = 0, \tag{1}$$

cuyo polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Como este polinomio tiene raíces $1 + i$ y $1 - i$ las soluciones de (1) son todas de la forma

$$x_H(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t),$$

Donde C_1 y C_2 son constantes.

Por otro lado buscamos una solución particular, para esto probamos con funciones de la forma $x_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$.

Observamos que

$$x_p'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t) \text{ y } x_p''(t) = -A\cos(t) - B\sin(t),$$

luego

$$\sin(t) - 2\cos(t) = x_p''(t) - 2x_p'(t) + 2x_p(t) = \sin(t)(B - 2A) + \cos(t)(A - 2B).$$

Esto se cumple si y solo si $A = 0$ y $B = 1$, luego $x_p(t) = \sin(t)$.

La solución general de la ecuación nos queda entonces

$$x(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t) + \sin(t).$$

Imponiendo $x(0)$ obtenemos de forma directa $C_1 = 0$. Luego

$$x'(t) = C_2 e^t \sin(t) + C_2 e^t \cos(t) + \cos(t),$$

por lo que imponiendo $x'(0) = 2$ obtenemos $C_2 = 1$.

En conclusión, la solución buscada es

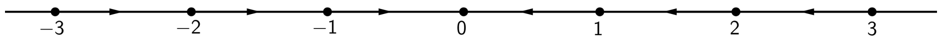
$$x(t) = (e^t + 1)\sin(t).$$

3. a) Observamos que si $(x(t), y(t))$ es solución, entonces $y(t)$ es constante ya que $y'(t) = 0$ para todo t. Esto implica que toda solución está contenida en una recta horizontal.

   Por otro lado la ecuación (en $\mathbb{R}$)

$$x' = -x(\sin(\pi x))^2 \tag{2}$$

   tiene puntos de equilibrio en todos los enteros. Estudiando el signo de $-x(\sin(\pi x))^2$ tenemos el diagrama de fase de (2):



Juntando lo anterior tenemos que los puntos críticos son de la forma (n, y) para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{R}$. Los puntos de la forma $(0, y)$ son estables puesto que en un entorno todas las trayectorias tienden al eje vertical y recorren rectas horizontales. Estos no son asintóticamente estables ya que otros puntos de equilibrios acumulan en él. El resto de los puntos de equilibrio son inestables porque existen trayectorias que convergen a cada uno de ellos en el pasado.

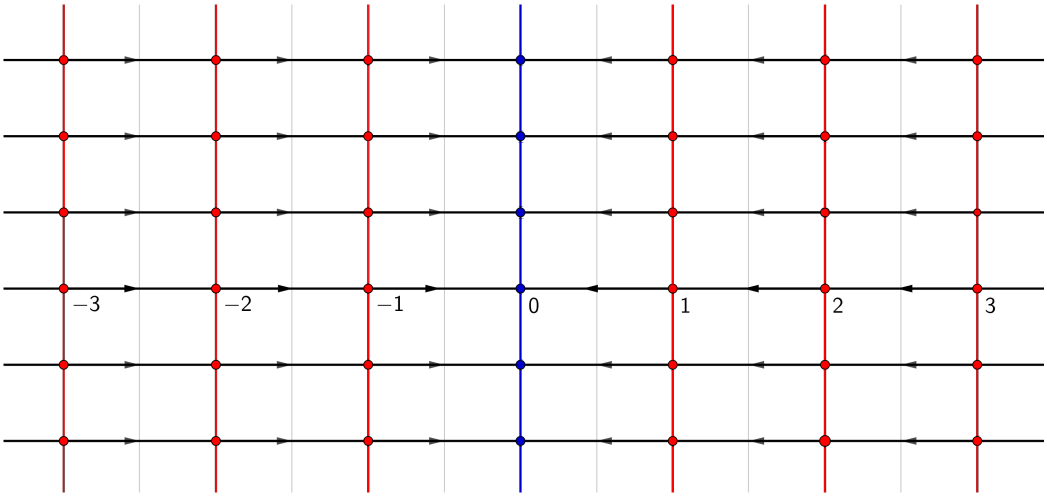
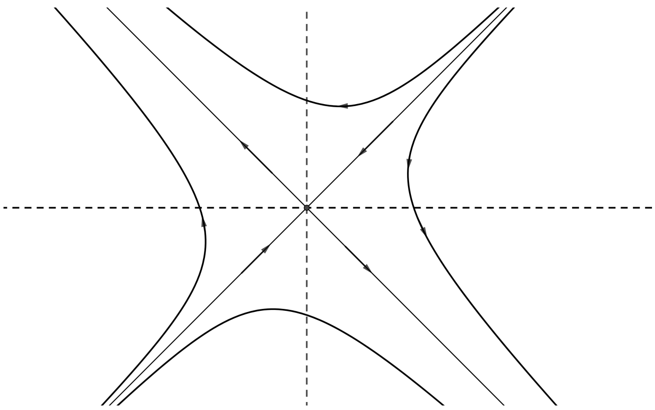


Figure 1: El azul indica los puntos de equilibrio estables y el rojo los inestables.

b) Como la matriz que determina la ecuación es invertible el único punto de equilibrio es $(0, 0)$. Los valores propios de dicha matriz son 2 y -1, luego el punto de equilibrio es inestable.

   También podemos ver que el espacio propio asociado al valor propio 2 es la recta $y = -x$, mientras que el espacio propio asociado a -1 es la recta $y = x$. Por lo tanto el diagrama de fase queda de la siguiente manera:



4. Consideramos la función $V(x,y) = x^2 + y^m$. La derivada de Lyapunov de esta función con respecto a la ecuación dada es

$$\dot{V}(x,y) = \nabla V(x,y) \cdot (2y^3, -x) = (2x, my^{m-1}) \cdot (2y^3, -x) = 4xy^3 - mxy^3.$$

Observamos que si $m = 4$, entonces $\dot{V} \equiv 0$, es decir que V es una preintegral de la ecuación.

Por un lado puede aplicarse el primer teorema de Lyapunov, ya que V tiene un mínimo absoluto en 0 y $\dot{V}(x,y) \leq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De esta forma probamos que el origen es un punto de equilibrio estable.

Por otro lado, como V es una preintegral, sabemos que las soluciones a la ecuación están contenidos en curvas de nivel. Como el origen es mínimo absoluto de V, dado un punto $(x_0, y_0) \neq 0$ se tiene $V(x_0, y_0) = r > 0$. Si ahora φ la solución con condición inicial $\varphi(0) = (x_0, y_0)$, entonces para todo t se tiene $V(\varphi(t)) = r$. Si se cumpliera $\varphi(t) \to (0,0)$ con $t \to +\infty$, entonces debería pasar

$$\lim_{t \to +\infty} V(\varphi(t)) = V(0,0) = 0,$$

puesto que V es continua. Pero esto es absurdo ya que dicho límite debe ser r, por lo que concluimos que el origen no es asintóticamente estable ya que no hay soluciones (además de la constante $(0,0)$) que converjan al origen para el futuro.

5. Buscamos soluciones de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Derivando $u(x,y)$ con respecto a x e y respectivamente obtenemos

$$u_x(x,y) = X'(x)Y(y) \text{ y } u_y(x,y) = X(x)Y'(y).$$

Imponiendo la primer condición tenemos

$$0 = 2xu_x(x,y) - yu_y = 2xX'(x)Y(y) - yX(x)Y'(y) \Rightarrow 2xX'(x)Y(y) = yX(x)Y'(y)$$

Asumiendo que $X(x), Y(y) \neq 0$ (esto debe pasar si $x, y \neq 0$ ya que $X(x)Y(x) = x^3$ y $X(y)Y(y) = y^3$) reescribimos lo anterior de la siguiente forma

$$2x\frac{X'(x)}{X(x)} = y\frac{Y'(y)}{Y(y)}.$$

Como la parte izquierda de esta igualdad no depende de y y la parte derecha no depende de x podemos afirmar que ambas funciones son constantes con igual valor κ. Esto nos da dos ecuaciones de variables separables.

Hallamos X:

$$\int \frac{X'(x)}{X(x)}dx = \int \frac{\kappa}{2x}dx \Rightarrow X(x) = C_1 x^{\frac{\kappa}{2}},$$

donde C_1 es una constante. De la misma forma obtenemos $Y(y) = C_2 y^{\kappa}$ (con C_2 constante). Es decir que tenemos

$$u(x,y) = C_1 C_2 x^{\frac{\kappa}{2}} y^{\kappa}.$$

Imponiendo la segunda condición tenemos

$$x^3 = u(x,x) = C_1 C_2 x^{\frac{3}{2}\kappa},$$

de donde finalmente concluimos que $C_1 C_2 = 1$ y $\kappa = 2$, es decir que la solución es

$$u(x,y) = xy^2.$$

Es directo ver que u satisface ambas condiciones del problema.