Resolución del examen

1) a) Puede notarse que, $y(x)\equiv 0$ es solución y satisface la condición inicial, entonces es la solución.

Otra forma de resolver el ejercicio:

$(x^2+9)y' + xy = 0$ → utilizando variables separables obtenemos $(x^2+9)y' = -xy$

$$\rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-x}{x^2+9} \Rightarrow \lg y = -\frac{1}{2}\lg(x^2+9) + k$$

Entonces $y(x) = K(x^2+9)^{-1/2}$

Imponiendo la condición inicial obtenemos (En este caso debemos verificar la solución)

$y(x) = 0$

b) Busco soluciones separando variables:

$$\dot{x} = e^{t} . e^{x} \to \dot{x} . e^{-x} = e^{t}$$

$$\to -e^{-x} = e^{t} + k \to e^{-x} = -e^{t} - k$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow e^{-1} = -e^{0} - k \to -k = 1 + 1/e$$

Entonces $e^{-x} = -e^{t} + 1 + 1/e \to \boxed{x = -\lg\left(-e^{t} + 1 + 1/e\right)}$

2) a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

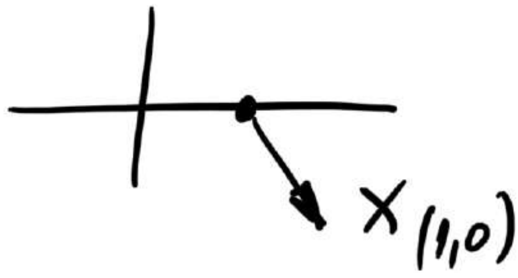
$$\to (3-\lambda)^2 + 25 = 0 \qquad 3-\lambda = \pm 5i \to \underline{\lambda = 3 \pm 5i}$$

Entonces: $x(t) = A e^{3t} \cos(\varphi(t) + \varphi_0)$

$y(t) = A e^{3t} \operatorname{sen}(\varphi(t) + \varphi_0)$

donde $\varphi(t) = 5t$ ó $\varphi(t) = -5t$

Como $X_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$



,

$\varphi(t) = -5t$

Entonces $\boxed{\begin{array}{l} x(t) = A e^{3t} \cos(-5t + \varphi_0) \\ y(t) = A e^{3t} \operatorname{sen}(-5t + \varphi_0) \end{array}}$ con $\underline{A > 0}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = A \cos \varphi_0 = 2 \\ y(0) = A \operatorname{sen} \varphi_0 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_0 = -1/2,$$

o sea podemos tomar $\boxed{\varphi_0 = \operatorname{arctg}(-1/2)}$

$$A^2 \cos^2 \varphi_0 + A^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 = A^2 = 4 + 1 \rightarrow \boxed{A = \sqrt{5}}$$

b) $x'' + 4x = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \quad \underline{\lambda = \pm 2i}$

$x(t) = A \cos(2t) + B \operatorname{sen}(2t)$

$x(0) = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow x(t) = B \operatorname{sen} 2t$

$x'(t) = 2B \cos 2t \quad x'(0) = 2B = 2 \rightarrow B = 1$

$\boxed{x(t) = \operatorname{sen} 2t}$

3) a) Tomando $V(x,y)=x^2+y^2$ obtenemos que $\dot V(x,y)=2x(y-x^3)+2y(-x-y^3)=-2x^4-2y^4$

$\dot V$ es definida negativa y V es definida positiva, entonces el $(0,0)$ es asintóticamente estable.

b) $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -x \end{cases}$ Tomando $V(x,y)=x^2+y^2$ obtenemos que $\dot V(x,y)=0$

Entonces las soluciones están incluidas en circunferencias de centro el $(0,0)$, por lo que el $(0,0)$ es estable no asintóticamente estable (para el futuro).

4) $L(x'') + L(x) = L(e^{t})$

$$sLx' - 3/2 + Lx = \frac{1}{s-1}$$

$$s\left(sLx - 3/2\right) - 3/2 + Lx = \frac{1}{s-1}$$

$$Lx\,(s^2+1) + 3/2\,(-s-1) = \frac{1}{s-1}$$

$$Lx = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{3/2\,(s+1)}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Ms+N}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1)+(Ms+N)(s-1)}{(s-1)(s^2+1)}$$

Entonces
$$\left.\begin{aligned} A + M &= 0 \\ -M + N &= 0 \\ A - N &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= 1/2 \\ M &= -1/2 \\ N &= -1/2 \end{aligned}\right.$$

$$Lx = \frac{1/2}{s-1} + \frac{-1/2\, s}{s^2+1} - \frac{1/2}{s^2+1} + \frac{3/2\, s}{s^2+1} + \frac{3/2}{s^2+1}$$

$$= \frac{1/2}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

Entonces $\boxed{x(t) = 1/2\, e^{t} + \cos t + \operatorname{sen} t}$