Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

SOLUCIÓN – EXAMEN 13 DE DICIEMBRE DE 2023.

Ejercicio 1.

Parte 1. Fijado $x \in [0,1]$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $4/n < x$. Luego, por definición de $\{f_n\}$ se tiene que $f_n(x) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Lo que implica que $f_n \to 0$ puntualmente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Parte 2. Para estudiar la convergencia uniforme, calculemos

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \text{máx}\left\{\frac{1}{n}, n^\alpha\right\}.$$

Luego, si $\alpha < 0$ se tiene que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ y por lo tanto hay convergencia uniforme. Si $\alpha = 0$ o si $\alpha > 0$ se tiene que $\text{máx}\left\{\frac{1}{n}, n^\alpha\right\} = n^\alpha$. Como $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \neq 0$, no hay convergencia uniforme.

Ejercicio 2.

Parte 1. Como la función $f(t,x) = t^2 + x^2$ es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$, por el Teorema de Picard, se tiene que hay una única solución maximal.

Antes de probar la partes 2) y 3), hacemos la siguiente observación:
Vamos a usar el ejercicio 4 del práctico 4 (comparación de soluciones). Consideramos $f_1(t,x) = x^2 \leq t^2 + x^2 = f_2(t,x)$ y $t_1 \geq 0$, $x_1 > 0$. Entonces la solución de $\dot{x} = x^2$ con condición $x(t_1) = x_1$ es $x(t) = \dfrac{-1}{t - \left(t_1 + \frac{1}{x_1}\right)}$, cuyo intervalo maximal es $\left(-\infty, t_1 + \frac{1}{x_1}\right)$. Si llamamos φ a la solución maximal de $\dot{x} = t^2 + x^2$ con $x(t_1) = x_1$, por comparación de soluciones se tiene que $\varphi(t) \geq x(t)$ para $t > t_1$, lo que implica que el intervalo maximal de φ está acotado superiormente.

Parte 2. Basta tomar $t_1 = 0$, $x_1 = 1$ y utilizar la observación anterior.

Parte 3. Sea I el intervalo maximal y $\varphi : I \to \mathbb{R}$ la solución maximal con $\varphi(0) = 0$. Como $\varphi^{'}(t) = t^2 + \varphi^2(t)$ para todo $t \in I$, se tiene que $\varphi^{'}(t) > 0$ para todo $t \in I$ con $t \neq 0$. Sea $t_1 > 0$, $t_1 \in I$. Como $\varphi(0) = 0$ y $\varphi^{'}(t) > 0$ entonces necesariamente $\varphi(t_1) = x_1 > 0$. Usando la observación anterior resulta que I está acotado superiormente.

Ejercicio 3. Ver notas del curso.

Ejercicio 4.

Busquemos soluciones de la forma:

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{1}$$

1. $u_t = u_{xx} + u \Rightarrow T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + T(t)X(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)+X(x)}{X(x)}\cdot$ En esta última igualdad tenemos una función que depende del tiempo igualada a una función que depende de la posición. De modo que:

$$\frac{d}{dx}\frac{T'}{T}(t) = \frac{d}{dt}\frac{X'' + X}{X}(x) = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T}(t) = \frac{X'' + X}{X}(x) = \lambda \text{ (cte)}.$$

Por lo tanto, podemos obtener el siguiente problema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de una ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} X'' + (1-\lambda)X = 0 \\ T' - \lambda T = 0. \end{cases}$$

2. Como $u(t,0) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) = 0$ o $X(0) = 0$. Si $T(t)$ fuese la función nula tendríamos que $u(t,x) = 0$, que no verifica la condición inicial $u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^3}\cdot$ Por lo tanto la opción que nos sirve es $X(0) = 0$.

3. $u(t,\pi) = T(t)X(\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$. Descartamos la opción $T(t) = 0$ por la misma razón que en el caso anterior.

En resumen:

$$\begin{cases} X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Por comodidad llamaremos $\lambda^{'} = \lambda - 1$. Por lo tanto la ecuación $X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0$ se transforma en $X''(x) - \lambda^{'}X(x) = 0$. Las posibles soluciones de esa ecuación dependen del signo de $\lambda^{'}$:

- Caso (a): $\lambda^{'} > 0$.

  Si $\lambda^{'} > 0$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda^{'} = \alpha^2$.

  $$\lambda^{'} = \alpha^2 \Rightarrow X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

  Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(\pi) = Ae^{\alpha\pi} + Be^{-\alpha\pi} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } A = B = 0$$

  La primera condición no es válida ya que supusimos $\lambda = \alpha^2 > 0$. La segunda tampoco es válida ya que obtendríamos $X(x) = 0$ lo que resultaría nuevamente en la función $u(t,x) = 0$. Por ende, λ no podrá ser mayor a cero.

- Caso (b): $\lambda^{'} = 0$.

  $\lambda^{'} = 0$ implica que $X'' = 0$, integrando dos veces, obtenemos que

  $$X(x) = Ax + B$$

  Nuevamente, imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\begin{cases} X(0) = B = 0 \\ X(\pi) = A\pi + B \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$$

  Nuevamente se obtendría la solución trivial la cual no es válida. Por lo tanto, λ tampoco podrá ser cero.

- Caso(c): $\lambda' < 0$. Si λ' es negativo, existe algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda' = -\alpha^2$.

$$\lambda' = -\alpha^2 \Rightarrow X(x) = A\cos(\alpha x) + B\operatorname{sen}(\alpha x)$$

Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(\pi) = B\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \ \Rightarrow B = 0 \text{ o } \operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \end{cases}$$

Si consideramos la primera opción, obtenemos la solución trivial. Si se verifica la segunda opción:

$$\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \Rightarrow \alpha\pi = n\pi \Rightarrow \alpha = n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow X(x) = B_n \operatorname{sen}(nx).$$

Como $\alpha = n$ entonces $\lambda' = -n^2$ y por lo tanto $\lambda = 1 - n^2$.

Volviendo a la ecuación $T' - \lambda T = 0$ tenemos que $T(t) = C_n e^{(1-n^2)t}$. Así, nuestra solución al problema sería de la forma:

$$u_n(t,x) = X(x)T(t) = A_n \operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t},\ \text{donde } A_n = B_n C_n.$$

Falta imponer la condición $u(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$. Como

$$u(0,x) = A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}.$$

no es posible hallar una única constante A_n que verifique la condición anterior. Como la ecuación $u_t = u_{xx} + u$ es lineal, cualquier combinación lineal finita de soluciones será solución. Esto sugiere buscar un candidato a solución de la forma:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}.$$

Así:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3} \text{ y tomamos } A_n = \frac{1}{n^3}.$$

Luego, nuestro candidato a solución es:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}}{n^3}.$$

Parte 2.

Vamos a utilizar los siguientes resultados:

Proposición 0.1 (Derivada respecto de t)

Sea $S_n(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. *Si:*

- *$S_n(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x)$ en X.*

- *$S_{n_t}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$ en X.*

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x) \text{ para todo } (t,x) \in X.$$

Observación: Basta con pedir que $S_n(t_0,x_0)$ converja en algún punto $(t_0,x_0) \in X$. No es necesario pedir que $S_n(t,x)$ converja uniformemente.

Proposición 0.2
Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ que verifica:

- *$|u_n(t,x)| \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $(t,x) \in X$,*

- *la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ es convergente*

Entonces existe $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x)$ converge uniformemente a u en X.

Sea $u_n(t,x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}}{n^3}$. Entonces

$$|u_n(t,x)| = \left| \frac{\operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \text{ para todo } (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi)$$

ya que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para todo x y $e^{(1-n^2)t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Luego, por la proposición 0.2, se tiene que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x)$ converge uniformemente en $(0,+\infty) \times (0,\pi)$.
Sea $\delta > 0$ y t tal que $t > \delta$. Entonces se tiene que $(1-n^2)t < (1-n^2)\delta$ y por lo tanto $e^{(1-n^2)t} < e^{(1-n^2)\delta}$. Entonces:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x) \right| = \left| (1-n^2) \frac{\operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n} e^{(1-n^2)\delta} \text{ para todo } (t,x) \in (\delta,+\infty) \times (0,\pi).$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{(1-n^2)\delta}$ converge, por la proposición 0.2 la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x)$ converge uniformemente en $(\delta,+\infty) \times (0,\pi)$. Luego, aplicando la proposición 0.1, se cumple que $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x)$ para todo $(t,x) \in (\delta,+\infty) \times (0,\pi)$. Como este razonamiento vale para todo $\delta > 0$, se concluye esa igualdad que vale para todo $(t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi)$.