Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

EXAMEN – 13 DE DICIEMBRE DE 2023. DURACIÓN: 3:00 HS.

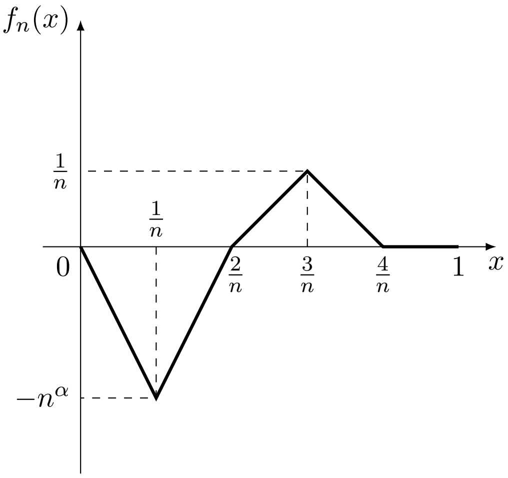
Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

- El puntaje total del examen es de 100 puntos. El mínimo para aprobar es 60 puntos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- Todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.

PARA USO DOCENTE				
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	**Total**

Ejercicio 1. (20 puntos)

Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como en la siguiente figura, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.



1. Estudiar convergencia puntual en $[0,1]$, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Estudiar convergencia uniforme en $[0,1]$, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. (20 puntos)

Se considera la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 + x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1. Probar que existe una única solución maximal.
2. Probar que la solución con condición inicial $x(0) = 1$ tiene intervalo maximal acotado superiormente.
3. Probar que la solución con condición inicial $x(0) = 0$ tiene intervalo maximal acotado superiormente.

Ejercicio 3. (25 puntos)

Enunciar y demostrar el segundo teorema de Liapunov (Liapunov 2).

Ejercicio 4. (35 puntos)

Sea $u : [0, +\infty] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua y de clase C^2 en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$ que verifica:

- $u_t = u_{xx} + u$, en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$.
- $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty)$.
- $u(0, x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$, $\forall x \in [0, \pi]$.

1. Usando el método de separación de variables, hallar un candidato a solución que sea de la forma $u(t, x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x)$.
2. Probar que $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t, x)$. Enunciar los resultados que se utilicen.