Universidad de la República | **Facultad de Ingeniería - IMERL**

Ecuaciones Diferenciales

SOLUCIÓN EXAMEN DICIEMBRE 2022

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3
Versión 1	**C**	**E**	**A**

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3
Versión 2	**C**	**D**	**D**

I. Solución Múltiple Opción

Versión 1 (la Versión 2 tenía los mismos ejercicios en diferente orden)

Ejercicio 1.(12 pts.) Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Indique la opción correcta.

(A) f_n converge uniforme en $\mathbb{R}$ a cero.

(B) $\sup\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}\} = \infty$ y por lo tanto f_n no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

(C) f_n restricta a $[-1, 1]$ converge uniformemente a cero.

(D) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}\} = 1$ y f_n no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

(E) f_n no converge puntualmente en $\mathbb{R}$.

Solución Calculemos el límite puntual de f, sea $x \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x}{n} = 0$$

Por lo que f_n converge puntualmente a la función 0, podemos descartar la opción (E).

Calculemos $sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Observar que dado dado $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$$

Por lo que podemos descartar la opción (D).

Observar que el hecho que $\sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$, no implica que f_n no converga uniformemente en $\mathbb{R}$. Por ejemplo $g_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $\sup\{|g_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$ y $f_n(x)$ converge uniformemente a $g(x) = x$. Con esto eliminamos la opción (B).

Observar que como f_n converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}$ y como $\sup\{|f_n(x) - 0| : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$ entonces f_n no converge uniformemente a $\mathbb{R}$, descartamos la opción (A).

Si consideramos f_n restricta a $[-1,1]$ tenemos que

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in [\,-1,1]]\} = \frac{1}{n} \to 0$$

lo cual implica la convergencia uniforme de f a cero. Probamos que la opción correcta es la (C).

Ejercicio 2.(12 pts.)Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Entonces la transformada de Laplace de la solución es igual a:

(A) $\dfrac{s}{(s+1)^2}$

(B) $\dfrac{s}{(s-1)^2}$

(C) $\dfrac{s}{(s+1)^3}$

(D) $\dfrac{s}{(s+1)}$

(E) $\dfrac{s}{(s-1)^3}$

Solución Se cumple que:

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0) = s\mathcal{L}(y)$$

$$\mathcal{L}(y'') = s\mathcal{L}(y') - y'(0) = s^2\mathcal{L}(y) - 1$$

$$\mathcal{L}(e^x) = \frac{1}{s-1}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación:

$$\mathcal{L}(y'' - 2y' + y) = \mathcal{L}(e^x)$$

Usando la linealidad:

$$\mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1}$$

Sustituyendo

$$s^2\mathcal{L}(y) - 1 - 2s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1}$$

Así que:

$$\mathcal{L}(y)(s^2 - 2s + 1) - 1 = \frac{1}{s-1}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}(y)(s^2 - 2s + 1) = \frac{s}{s-1}$$

Obtenemos:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s}{(s-1)^3}$$

Ejercicio 3.(12 pts.) Considere el sistema

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$$

Marque la opción correcta.

(A) El orígen es asintóticamente estable para el futuro.

(B) El orígen no es estable para el futuro.

(C) El orígen es estable pero no asintóticamente estable para el futuro.

(D) Existen soluciones constantes diferentes de la solución por el orígen.

(E) Existe una solución $\phi(t)$ tal que $\lim_{t \to +\infty} \|\phi(t)\| = +\infty$

Solución

Calculemos los vaps de la matriz:

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Por lo que los vaps son $-1 \pm i$, como los vaps tienen parte real negativa, el origen es asintóticamente estable para el futuro.

II. Desarrollo

Ejercicio 1.(24 pts.) Encontrar la solución general y dibujar el diagrama de fase para las siguientes ecuaciones:

(a)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$$

Solución Notemos

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Hallemos vaps de la matriz A:

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 7$$

Luego los vaps de A son: $\dfrac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 2 \pm i\sqrt{3}.$

Luego para $D = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$ existe P invertible tal que $A = PDP^{-1}$

Para hallar la matriz P, hallemos el núcleo de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2-(2+i\sqrt{3}) & 3 \\ -1 & 2-(2+i\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 3 \\ -1 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $x + i\sqrt{3}y = 0$ lo que implica $x = -i\sqrt{3}y$, podemos escribir P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

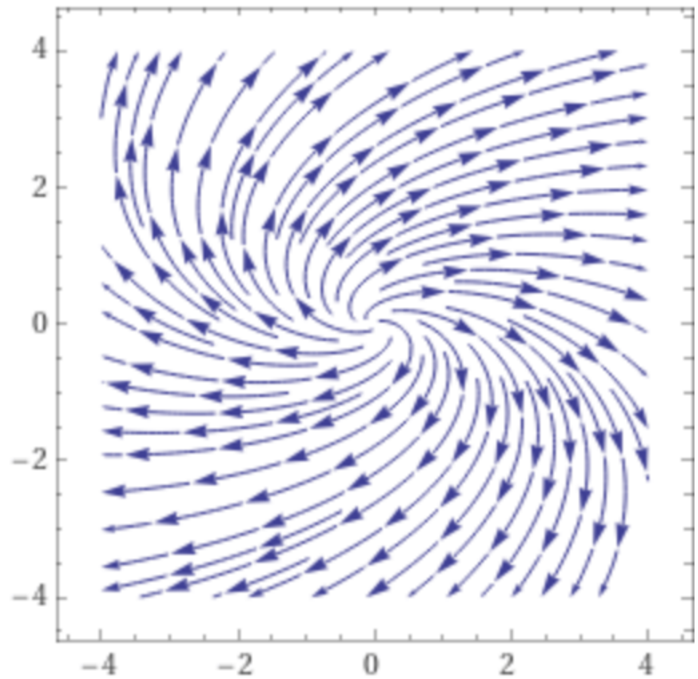
Ademas

$$e^D t = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{3}t & \sin\sqrt{3}t \\ -\sin\sqrt{3}t & \cos\sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que la solución general se puede escribir como

$$e^A t X_0 = Pe^D t P^{-1} X_0$$

donde $X_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$.



(b)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$$

Solución Notemos

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Hallemos vaps de la matriz A:

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

Luego A tiene a 2 como un vap con multiplicidad algebraica igual a 2.

Luego para $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ existe P invertible tal que $A = PDP^{-1}$ Para hallar la matriz P tenemos que hallar dos vectores u, v tales que $Au = 2u + v$ y que $Av = 2v$, Luego $(A - 2Id)u = v$ y por lo tanto u no pertenece al subespacio propio asociado a 2.

Hallemos S_2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $x = 0$, así que $S_2 = \{(0, y)\}$.

Tomemos $u = (1, 0) \notin S_2$, luego $v = (A - 2Id)u = (0, -1)$.

Podemos escribir P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

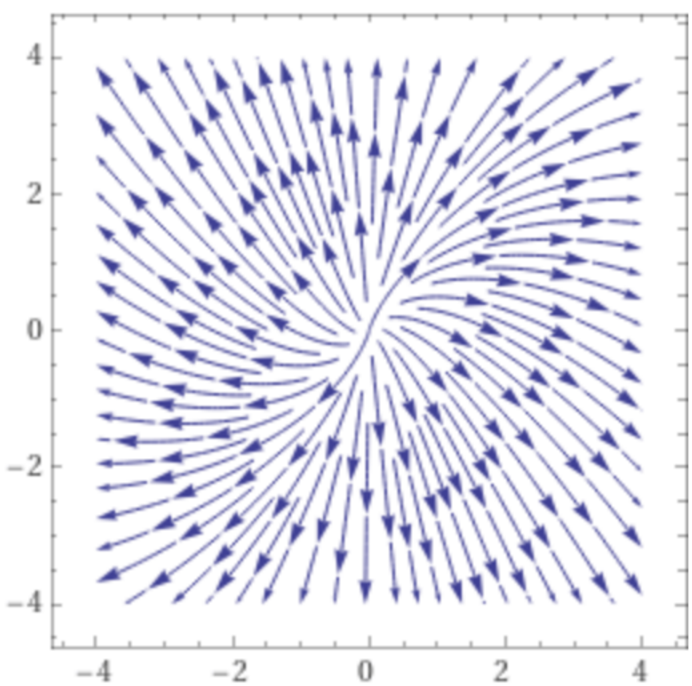
Ademas

$$e^D t = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que la solución general se puede escribir como

$$e^A t X_0 = P e^D t P^{-1} X_0$$

donde $X_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$.



Ejercicio 2.(24 pts.) Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - xy \\ \dot{y} = 2y^3 - 2y^2 x \end{cases}$$

Estudiar la estabilidad de los puntos críticos.

Solución

Hallemos los puntos críticos:

- $\dot{x} = 0 \to x^2 - xy = 0$ esto implica $x = 0$ o $x = y$
- $\dot{y} = 0 \to 2y^3 - 2y^2x = 0$ esto implica $y = 0$ o $x = y$.

Luego los puntos criticos son exactamente la recta $x = y$. Hallemos el Jacobiano de f:

$$J_(x, y)f = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ -2y^2 & 6y^2 - 4yx \end{pmatrix}$$

$$J_(a, a)f = \begin{pmatrix} a & -a \\ -2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores propios:

$$det \begin{pmatrix} a - \lambda & -a \\ -2a^2 & 2a^2 - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(2a^2 - \lambda) - 2a^3 = \lambda^2 - \lambda(2a^2 + a)$$

Esto implica que 0 y $2a^2 + a$ son vaps de $J_(a, a)f$.

Voy a estudiar la estabilidad de los puntos tales que $2a^2 + a > 0$ o sea $a > 0$ o $a < -2$, en este caso $J_(a, a)f$ tiene un vap con parte real positiva y usando el Teorema de Hartman-Grossman es inestable.

Ejercicio 3.(19 pts.) Considere el siguiente problema con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = cos(t + x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Mostrar ultizando el Teorema de Escape de Compactos que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ la solución maximal está definida en $\mathbb{R}$.

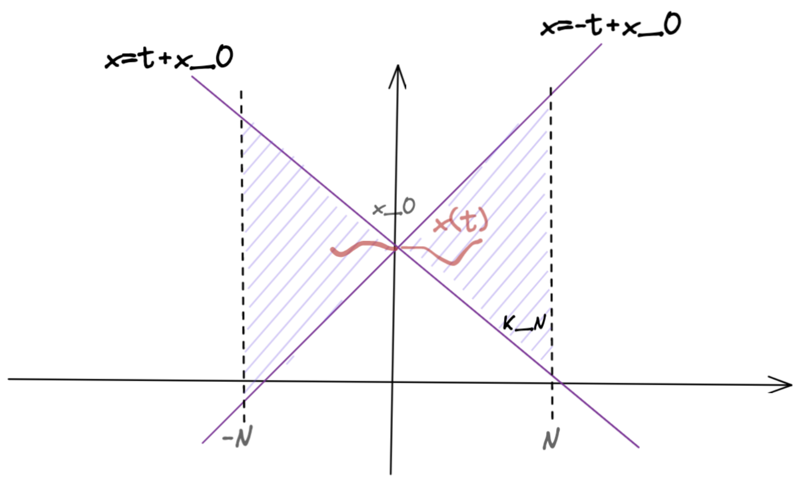
Solución

Observar que $\dot{x}$ es acotada o sea que: $-1 \leq \dot{x} \leq 1$ por lo tanto:

$$-\int_0^t dt \leq \int_0^t \dot{x} \leq \int_0^t dt$$
$$-t \leq x(t) - x_0 \leq t$$
$$-t + x_0 \leq x(t) \leq t + x_0$$

Además $f(t,x) = \cos(x+t)$ es $\mathcal{C}^1$ por lo que estamos en hipótesis de Picard y también de escape de compactos para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ considero la solución maximal por x_0: $x : I \to \mathbb{R}$.

Para $N \in \mathbb{N}$ tomamos el compacto K_N limitado por las rectas $x = -t + x_0$, $x = t + x_0$, $t = -N$ y $t = N$, como se puede ver en la figura.



Por el teorema de escape de compactos existen $t_1 < 0$ y $t_2 > 0$ tales que $(t_i, x(t_i)) \notin K_N$ con $i = 1, 2$.

Observar que la solución verifica que:

$$-t + x_0 \leq x(t) \leq t + x_0$$

por lo que no se puede escapar por las rectas $x = t + x_0$ o $x = -t + x_0$, necesariamente $t_1 < -N$ y $t_2 > N$. Lo anterior es independiente de N, lo que implica que el intervalo maximal es $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.(17 pts.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π periódica tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, \pi) \\ 9 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Hallar la serie de Fourier de f.

Solución

- $a_0 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$
- $a_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = 0$
- $b_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = -\int_{-\pi}^{0} \sin(kx)dx + \int_{0}^{\pi} \sin(kx)dx =$
- $b_k = \dfrac{\cos(kx)}{k}|_{-\pi}^{0} - \dfrac{\cos(kx)}{k}|_{0}^{\pi} = \dfrac{1 - (-1)^k - (-1)^k + 1}{k} = \dfrac{2(1 - (-1)^k)}{k}$

  Observar que $b_{2k} = 0$ y $b_{2k-1} = \dfrac{4}{2k-1}$.

  Asi que la serie de Fourier queda:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k-1} \sin\left((2k-1)x\right)$$